

Aberrationskurven und Kaustikflächen
magnetisch abgelenkter Elektronenstrahlbündel

INAUGURAL-DISSERTATION

zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Günther Klotz
aus Meiningen

1969



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Aberrationskurven und Kaustikflächen
magnetisch abgelenkter Elektronenstrahlbündel

INAUGURAL-DISSERTATION

zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Günther Klotz
aus Meiningen



1. Gutachter: Prof. Dr. E. Ruska
2. Gutachter: Prof. Dr. S. Wilking

Tag der mündlichen Prüfung: 11.7.1969

Tag der Promotion:

29. SEP. 1969

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
Literaturverzeichnis	5
Einleitung	6
I <u>Magnetische Ablenkung von Elektronen-</u> <u>strahlen</u>	8
I.1 Ablenkung und Ablenkfehler nach W. Glaser	8
I.2 Elektronenbahnen und Kaustikflächen nach H. Grmm	12
I.3 Basisebene und Kaustikbedingung nach H. Grmm	18
II <u>Beschreibung des Bndelquerschnittes</u> <u>durch Aberrationskurven</u>	20
II.4 Allgemeine Entwicklung der Aberrations- kurven	20
II.4.1 Aberrationskurven für den Fall $a_8 a_{13} < 0$	22
II.5 Kaustikfläche für den Fall $a_8 a_{13} < 0$	25
II.6 Spezielle Aberrationskurven für ein einfaches eisenloses Ablenssystem	27

III	<u>Systematik der Aberrationskurven durch</u> <u>Untersuchung der Beziehungen zwischen</u> <u>Basis- und Schirmebene</u>	30
III.7	Basiskurve, Primärgeraden und Primärhüllkurve für $a_8 a_{13} < 0$	30
III.7.1	Abbildung von Testobjekten für $a_8 a_{13} < 0$	33
III.7.2	Sekundärhüllkurve und Übersicht über die möglichen Typen von Aberrationskurven für $a_8 a_{13} < 0$	36
III.8	Basiskurve, Primärgeraden und Primärhüllkurve für $a_8 a_{13} > 0$	41
III.8.1	Abbildung von Testobjekten für $a_8 a_{13} > 0$	44
III.8.2	Aberrationskurven für $a_8 a_{13} > 0$	46
III.8.3	Übersicht über die möglichen Typen von Aberrationskurven für $a_8 a_{13} > 0$	47
	Anhang	55
	Zusammenfassung	61

Einleitung

Wird ein, von einem Achsenpunkt ausgehendes Elektronenstrahlbündel durch eine ideale Elektronenlinse auf einen Punkt des Leuchtschirms fokussiert und danach durch ein außerhalb des Linsenfeldes liegendes Querfeld abgelenkt, so bleibt unter der Voraussetzung flach und achsennah in das Ablenkefeld einfallender Strahlen, sowie kleiner Ablenkungen die Fokussierung erhalten. Außerdem liegt eine strenge Proportionalität zwischen der Auslenkung des Brennflecks und der Erregung des Ablenksystems vor. Man spricht in diesem Fall von idealer Ablenkung. Liegen die Voraussetzungen der idealen Ablenkung nicht vor, so treten Ablenkfehler auf. Als solche bezeichnet man die Abweichungen der Schirmdurchstoßpunkte der tatsächlich durchlaufenen Bahnen von denen der Bahnen bei idealer Ablenkung. Sie wurden zuerst 1938 von W. Glaser (1) hergeleitet. Die Gesamtheit der Abweichungen der abgelenkten Einzelbahnen erzeugt auf dem Leuchtschirm das Fehlerscheibchen, dessen Gestalt nicht mehr der des unter idealen Voraussetzungen abgelenkten Bündels entspricht, sondern von der Form der zwischen Ablenkefeld und Leuchtschirm vorhandenen Kaustik abhängig ist. Wir wollen noch den Begriff der Aberrationskurven erwähnen, die in der vorliegenden Arbeit behandelt werden sollen. Für den Fall einer idealen Elektronenlinse läßt sich das fokussierte unabgelenkte Strahlenbündel als Gesamtheit von ineinanderliegenden konzentrischen Strahlenkegeln beschreiben. Die Kegelmäntel schneiden die Eintrittsebene im allgemeinen in Ellipsen, für ein von einem Achsenpunkt ausgehendes Strahlenbündel in konzentrischen Kreisen. Bei Ablenkung unter nichtidealen Voraussetzungen durchsetzen die von diesen Ellipsen bzw. Kreisen ausgehenden Strahlen die Leuchtschirmebene in geschlossenen Kurven mit stark variierender Gestalt, den Aberrationskurven. Diese werden wir auch als "Bilder" der Schnittlinien in der Eintrittsebene bezeichnen. Ihre Untersuchung führte uns auf die Betrachtung

der Fehler des ablenkenden Systems und die Behandlung der Bahngleichungen zwischen Eintritts- und Leuchtschirmebene. Diese hat H. Grümm (2) 1954 für die Kaustik in einer Arbeit über die Intensitätsverteilung im Brennfleck eines abgelenkten Strahlenbündels grundlegend dargestellt. Für die Lichtoptik waren Aberrationskurven für rotationssymmetrische Abbildungssysteme bereits 1926 von A. Gullstrand (3) und 1957 von N. Chako (4) beschrieben worden. Elektronenoptische Ablenkfehler und Aberrationskurven wurden 1963 von K. Kanaya et al. (5) untersucht, sowie 1967 von C. Wang (6). Die beiden letzten Arbeiten beschränken sich jedoch im wesentlichen auf die numerische Auswertung der Glaserschen Formeln. Unsere Untersuchungen bauen auf der Arbeit von Grümm auf und führen zu einer völligen Erklärung der Gestalt der Aberrationskurven und zu einer Übersicht über deren mögliche Typen.

I Magnetische Ablenkung von Elektronenstrahlen

I.1 Ablenkung und Ablenkfehler nach W. Glaser

Wir betrachten ein Elektronenstrahlbündel in allgemeiner Lage zur optischen Achse. Für das ablenkende magnetische Querfeld sollen bestimmte Symmetriebedingungen erfüllt sein, die in geeignet gewählten kartesischen Koordinaten x , y , z für die Feldkomponente in der x -Richtung zu folgenden Beziehungen führen

$$B_x(x, y) = B_x(-x, y) = B_x(x, -y). \quad (1.1)$$

Die Elektronen bewegen sich in geringen Neigungen zur z -Achse und werden vorwiegend in y -Richtung abgelenkt. Weisen die Strahlen zudem kleine Achsenabstände auf, so lassen sich die Bahngleichungen aus den Gesetzen der Gaußschen Dioptrik herleiten. Für das unabgelenkte, bei abgeschaltetem Ablenkkfeld vorhandene Bündel schreiben wir

$$\begin{aligned} x^{(0)}(z_s) &= x_s + x'_s(z - z_s) \\ y^{(0)}(z_s) &= y_s + y'_s(z - z_s) \end{aligned} \quad (1.2)$$

während sich bei Ablenkung die Bahngleichungen in Gaußscher Näherung

$$\begin{aligned} x^{(0)}(z_s) &= x_s + x'_s(z - z_s) \\ y^{(0)}(z_s) &= y_s + y'_s(z - z_s) + e(z) \end{aligned} \quad (1.3)$$

ergeben. Darin bedeuten - vgl. Abb. 1 - x_s und y_s die Koordinaten des Strahlendurchstoßpunktes in der Schirmebene $z = z_s$, x'_s und y'_s die Neigungen der Bahn in dieser Ebene und $e(z)$ die resultierende Ablenkung in der y -Richtung. Die Bahnen $x^{(0)}(z)$, $y^{(0)}(z)$ werden als Gaußsche Bahnen bezeichnet.

Für die ideale Ablenkung gilt die Gleichung:

$$e(z) = \sqrt{\frac{e}{2mU}} \int_{z_a}^z B(z') (z' - z) dz' \quad (1.4)$$

mit e , m als Ladung bzw. Masse des Elektrons, der relativistisch korrigierten Beschleunigungsspannung U^* und der x -Komponenten des Magnetfeldes $B(z)$.

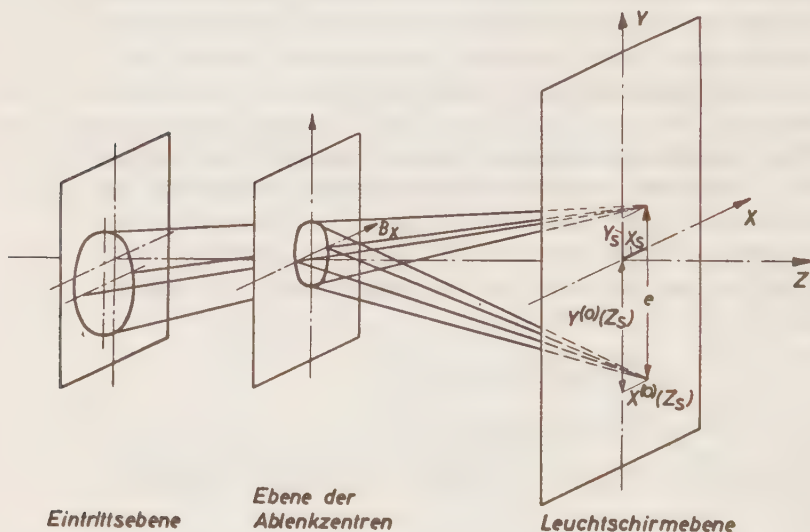


Abb. 1 Bahntangenten vor und nach der idealen Ablenkung.
Sie schneiden sich in der Ebene der Ablenkzentren.

Enthält das Bündel auch Strahlen mit größeren Achsenabständen und Neigungen, so treten die sogenannten Ablenkfehler auf. Sie äußern sich darin, daß der Durchstoßpunkt einer fehlerbehafteten, "realen" Bahn durch die Leuchtschirmebene im allgemeinen nicht mit dem der Gaußschen Bahn übereinstimmt. Wir

schreiben daher für $z = z_s$

$$x(z_s) = x^{(0)}(z_s) + \Delta x$$

$$y(z_s) = y^{(0)}(z_s) + \Delta y$$

(1.5)

mit den Abweichungen Δx und Δy , die sich aus der Theorie der Ablenkung von Elektronenstrahlen mit Hilfe eines Störungsverfahrens dritter Ordnung (7) ergeben.

$$\Delta x = a_6 x_s + a_4 x_s' + a_7 x_s y_s + 2a_8 x_s y_s' + a_9 x_s y_s' + a_{10} x_s' y_s$$

$$\begin{aligned} \Delta y = & a_1 + a_3 y_s + a_5 y_s' + [a_6 - \frac{1}{2} \gamma^* B'_z(z_s)] x_s^2 + \\ & + [a_8 - \frac{1}{2} \gamma^* B'_z(z_s) x_s - \frac{1}{2} \gamma^* B'_z(z_s)] x_s y_s' + \\ & + a_{11} y_s^2 + a_{12} y_s y_s' + a_{13} y_s'^2 \end{aligned} \quad \text{mit } \gamma^* = \sqrt{\frac{e}{2m\hbar^2}}$$

(1.6)

Die explizite Gestalt der Aberrationskoeffizienten a_i wird hier nicht benötigt, wir verweisen dazu auf (1 und 7). Die Abweichungen Δx und Δy sind in der Abb. 2 für einen Einzelstrahl als Differenz der Schirmdurchstoßpunkte der Gaußschen und der fehlerbehafteten Bahn dargestellt worden.

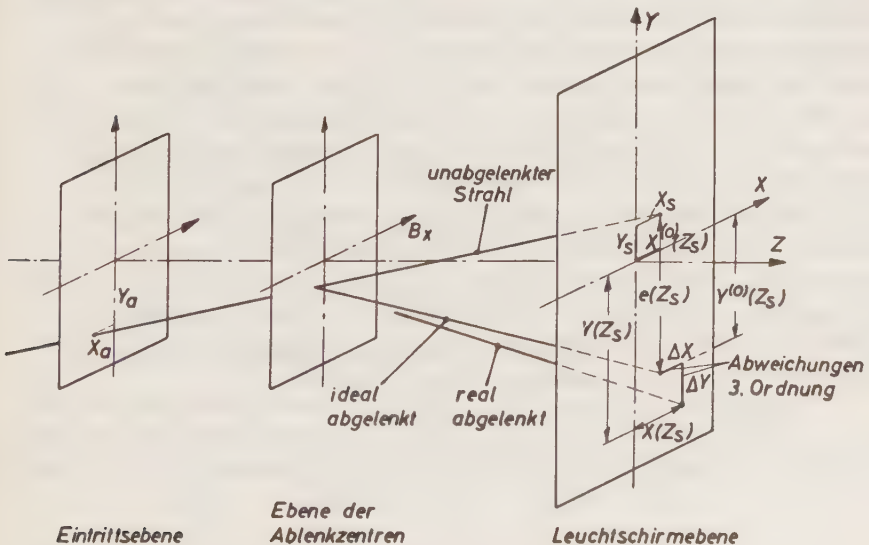


Abb. 2 Unabgelenkter Strahl sowie Bahntangenten für ideale und reale Ablenkung

Für ein räumliches Strahlenbündel erhalten wir den Punktabweichungen Δx und Δy der Abb. 2 entsprechend ein flächenhaft ausgedehntes Fehlerscheibchen. Seine Gestalt ist für ein kegelförmiges Bündel, das auf den Schirm fokussiert ist, in Abhängigkeit von seiner Lage zum Ablenkfeld erstmalig von Wendt (8) diskutiert worden. In den Gleichungen (1.3) ist der Elektronenstrahl durch die Koordinaten des Durchstoßpunktes auf dem Schirm und durch die Neigungen bestimmt. Die Ausdrücke (1.6) gleichen bis auf die Koeffizienten von x_s^2 , $x_s'^2$ und $x_s x_s'$ denen von Glaser (1), der 1938 als erster die Fehlerkoeffizienten dritter Ordnung berechnete. Die Abweichungen (7)

$$\begin{aligned}\tilde{a}_6 &= -\frac{1}{2} \gamma^* B'(z_a) (z_s - z_a) & \tilde{a}_8 &= -\frac{1}{2} \gamma^* B'(z_a) (z_s - z_a)^3 \\ \tilde{a}_9 &= \gamma^* B'(z_a) (z_s - z_a)^2\end{aligned}\quad (1.7)$$

berücksichtigen den Fall, daß das Ablenkfeld an der Stelle z_a noch nicht völlig abgeklungen ist. Innerhalb der Beschreibung der Kaustik des abgelenkten Bündels von Grumm (2), auf der unsere weiteren Untersuchungen aufbauen werden, ist das Verhältnis der Vorzeichen der Fehlerkoeffizienten a_8 und a_{13} entscheidend für den Typ der Kaustik, was wir noch darstellen werden. Es soll nur an dieser Stelle auf den möglichen Einfluß von $\tilde{a}_8$ als Bestandteil des Koeffizienten a_8 auf dessen Vorzeichen und damit auf den Kaustiktyp hingewiesen werden. Tritt das Bündel koaxial in das Ablenkfeld ein und ist es auf den Mittelpunkt des Leuchtschirms fokussiert, so ist eine Zuordnung der dann verbleibenden Fehlerkoeffizienten zu den bekannten Fehlertypen Verzeichnung (a_1), Astigmatismus (a_4 , a_5) und Koma (a_8 , a_{13}) möglich (Abb. 5). Wir wollen im nächsten Kapitel die Grummschen Bahn- und Kaustikgleichungen als Ausgangspunkt für unsere Untersuchungen herleiten.

I.2 Elektronenbahnen und Kaustikfläche nach H. Grumm

Wir wollen in den Gleichungen (1.6) die Summanden der rechten Seiten entsprechend ihrer Abhängigkeit von x'_s bzw. y'_s zusammenfassen und schreiben

$$\begin{aligned}\Delta x &= M + A_4 x' + A_3 y' + 2a_8 x' y' \\ \Delta y &= N + A_9 x' + A_5 y' + a_7 x'^2 + a_{13} y'^2\end{aligned}\quad (2.1)$$

mit

$$\begin{aligned}M &= a_2 x + a_7 y \\ A_4 &= a_4 + a_{10} y \\ A_3 &= a_3 x \\ N &= a_1 + a_3 y + a_6 x^2 + a_{11} y^2 \\ A_5 &= a_5 + a_{12} y\end{aligned}\quad (2.2)$$

wobei wir die Zusatzglieder (1.7) und den Index s, der die Schirmebene bezeichnet, weggelassen haben.

Führen wir die Substitutionen

$$x' = X + k \quad y' = Y + l \quad (2.3)$$

ein, so erhalten wir aus (2.1)

$$\begin{aligned}\Delta X &= \bar{M} + (A_4 + 2a_8 l) X + (A_3 + 2a_8 k) Y + 2a_8 X Y \\ \Delta Y &= \bar{N} + (A_9 + 2a_8 k) X + (A_5 + 2a_8 l) Y + a_7 X^2 + a_{13} Y^2\end{aligned}\quad (2.4)$$

mit

$$\begin{aligned}\bar{M} &= M + A_4 k + A_3 l + 2a_8 k l \\ \bar{N} &= N + A_9 k + A_5 l + a_7 k^2 + a_{13} l^2.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Für die weiteren Untersuchungen streben wir die Normalform der Elektronenbahngleichungen nach Grumm an, die für den Fall der Fehlerkombination $a_8 a_{13} > 0$ z.B. die Form

$$\begin{aligned} P &= 2uv - u \\ Q &= u^2 + v^2 + v \end{aligned} \quad (2.6)$$

hat, und fordern daher mit Grömm

$$A_5 + 2a_{13} \ell = - \frac{a_{13}}{a_8} (A_4 + 2a_8 \ell) \quad (2.7)$$

$$A_9 + 2a_8 \ell = 0.$$

Wir erhalten daraus

$$\ell = - \frac{A_9}{2a_8} \quad (2.8)$$

$$\ell = - \frac{A_5 a_8 + A_4 a_{13}}{4 a_8 a_{13}},$$

die wir in (2.4) einfügen, was zu

$$\Delta X - \bar{M} = \frac{A_4 a_{13} - A_5 a_8}{2 a_{13}} X + 2 a_8 X Y \quad (2.9)$$

$$\Delta Y - \bar{N} = \frac{A_5 a_8 - A_4 a_{13}}{2 a_8} Y + a_8 X^2 + a_{13} Y^2$$

führt. Mit der Abkürzung

$$K = \frac{A_4 a_{13} - A_5 a_8}{2} \quad (2.10)$$

und dem Ansatz

$$X = \lambda u \quad Y = \mu v \quad (2.11)$$

ergibt sich, wenn wir die Gleichungen (2.9) durch geeignete Faktoren dividieren, um sie der Form (2.6) anzupassen

$$\begin{aligned} \frac{\Delta X - \bar{M}}{a_8 \lambda \mu} &= \frac{K}{a_8 a_{13} \mu} u + 2uv \\ \frac{\Delta Y - \bar{N}}{a_8 \lambda^2} &= - \frac{K \mu}{a_8^2 \lambda} v + u^2 + \frac{a_{13} \mu^2}{a_8 \lambda^2} v^2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Durch Koeffizientenvergleich der rechten Seiten von (2.6) und (2.12) erhalten wir für λ und μ die Ausdrücke

$$\mu = - \frac{K}{q_8 q_{13}}$$

$$\lambda = \mu \sqrt{\frac{q_{13}}{q_8}}$$

(2.13)

und durch Einsetzen

$$P = \frac{\Delta x - \bar{M}}{q_8 \lambda \mu} = \frac{\Delta x - \bar{M}}{q_8 \sqrt{\frac{q_{13}}{q_8}} \left(-\frac{K}{q_8 q_{13}}\right)^2} = \text{sign} q_8 \frac{(\Delta x - \bar{M}) \sqrt{\quad}^3}{K^2 \sqrt{q_8 q_{13}}}$$

(2.14)

$$Q = \frac{\Delta y - \bar{N}}{q_8 \lambda^2} = \frac{\Delta y - \bar{N}}{q_8 \sqrt{\frac{q_{13}}{q_8}} \left(-\frac{K}{q_8 q_{13}}\right)^2} = \frac{\Delta y - \bar{N}}{K^2} q_8^2 q_{13}$$

Wir haben also mit

$$u = \frac{X}{\lambda} = - \frac{X}{K} \frac{q_8 q_{13}}{\sqrt{\frac{q_{13}}{q_8}}} = - \frac{X}{K} |q_8|^{\frac{3}{2}} |q_{13}|^{\frac{1}{2}}$$

(2.15)

$$v = \frac{Y}{\mu} = - \frac{Y}{K} q_8 q_{13}$$

sowie mit P und Q aus (2.14) die von Grömm angegebene Normalform der Bahngleichungen

$$P = 2uv - u$$

$$Q = u^2 + v^2 + v$$

(2.6)

erreicht, wobei u, v bzw. P, Q jedoch affine Koordinaten in der Basis-⁺⁾ bzw. Leuchtschirmebene sind. Entsprechende kartesische Koordinaten sind

$$\tilde{u} = u = - \frac{X}{K} |q_8|^{\frac{3}{2}} |q_{13}|^{\frac{1}{2}} \quad \tilde{P} = \sqrt{\frac{q_8}{q_{13}}} P$$

(2.16)

$$\tilde{v} = \sqrt{\frac{q_8}{q_{13}}} v = - \frac{Y}{K} |q_8|^{\frac{3}{2}} |q_{13}|^{\frac{1}{2}} \quad \tilde{Q} = Q ,$$

⁺⁾ Der Begriff der Basisebene wird in I.3 ausführlich behandelt.

woraus sich die Beziehungen ergeben:

$$\begin{aligned} P &= 2\tilde{u}\tilde{v} \sqrt{\left|\frac{q_3}{q_1}\right|} - \tilde{u} & \tilde{P} &= 2\tilde{u}\tilde{v} - \sqrt{\left|\frac{q_3}{q_1}\right|} \tilde{u} \\ Q &= \tilde{u}^2 + \frac{q_3}{q_1} \tilde{v}^2 + \sqrt{\left|\frac{q_3}{q_1}\right|} \tilde{v} & \tilde{Q} &= \tilde{u}^2 + \frac{q_3}{q_1} \tilde{v}^2 + \sqrt{\left|\frac{q_3}{q_1}\right|} \tilde{v}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Sei andererseits $a_3 a_{13} < 0$. Die angestrebte Normalform nach Grönm lautet dann

$$\begin{aligned} P &= 2uv + u \\ Q &= u^2 - v^2 + v. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Wir fordern nunmehr, daß durch Einsetzen von

$$X = \lambda u \quad \text{und} \quad Y = \mu v$$

in (2.9) die Normalform (2.18) entsteht. Wir erhalten

$$P = \frac{\Delta x - \bar{M}}{q_1 \lambda \mu} = \frac{K \lambda}{q_1 q_{13} \lambda \mu} u + \frac{2 q_1 \lambda \mu}{q_1 \lambda \mu} uv \equiv u + 2uv, \quad (2.19)$$

woraus

$$\mu = \frac{K}{q_1 q_{13}} = - \frac{K}{|q_1| |q_{13}|} \quad (2.20)$$

folgt und

$$Q = \frac{\Delta y - \bar{N}}{q_1 \lambda^2} = \frac{q_1 \lambda^2}{q_1 \lambda^2} u^2 + \frac{q_3 \mu^2}{q_1 \lambda^2} v^2 - \frac{K \mu}{q_1 \lambda^2} v \equiv u^2 - v^2 + v, \quad (2.21)$$

$$\text{was zu} \quad \lambda^2 = - \mu^2 \frac{q_{13}}{q_1} \quad \text{fñhrt.} \quad (2.22)$$

Ebenso ergibt sich

$$- \frac{K \mu}{q_1^2 \lambda^2} = \frac{K \mu q_1}{q_1^2 \mu^2 q_{13}} = \frac{K}{q_1 q_{13} \mu} = 1. \quad (2.23)$$

Entsprechend (2.14) und (2.15) stellen wir die Beziehungen für den Fall $a_3 a_{13} < 0$ im folgenden zusammen.

$$u = \frac{\chi}{\lambda} = \frac{\chi}{\mu \sqrt{|a_8/a_8|}} = - \frac{\chi}{K} |a_8|^{\frac{3}{2}} |a_{13}|^{\frac{1}{2}}$$

$$v = \frac{\chi}{\mu} = - \frac{\chi}{K} |a_8| |a_{13}|$$

$$P = \frac{\Delta x - \bar{M}}{a_8 \sqrt{|a_8|} \mu^2} = \frac{(\Delta x - \bar{M}) a_8^2 a_{13}^2}{a_8 \sqrt{|a_8|} K^2} = \frac{\Delta x - \bar{M}}{K^2} |a_8|^{\frac{3}{2}} |a_{13}|^{\frac{3}{2}} \quad (2.24)$$

$$Q = \frac{\Delta y - \bar{N}}{a_8 \lambda^2} = \frac{(\Delta y - \bar{N}) a_8^2 a_{13}^2}{a_8 \sqrt{|a_8|} K^2} = - \frac{\Delta y - \bar{N}}{K^2} a_8^2 a_{13}$$

Damit haben wir die beiden Typen der Normalform der Elektronenbahnen entsprechend den beiden möglichen Vorzeichen des Produktes $a_8 a_{13}$ aus der Gleichung (1.6) für die Ablenkfehler hergeleitet. Entsprechend ergeben sich auch zwei Typen von Kaustikflächen. Bei gleichen Vorzeichen von a_8 und a_{13} fand Grümm ein aus zwei Blättern bestehendes rinnenförmiges Gebilde (Abb. 3a) - die durch Spiegelung an der x-y-Ebene entstehende zweite Rinne wurde hier nicht eingezeichnet. Für ungleiche Vorzeichen ergab sich die im Querschnitt sternförmige Kaustikfläche der Abb. 3b.

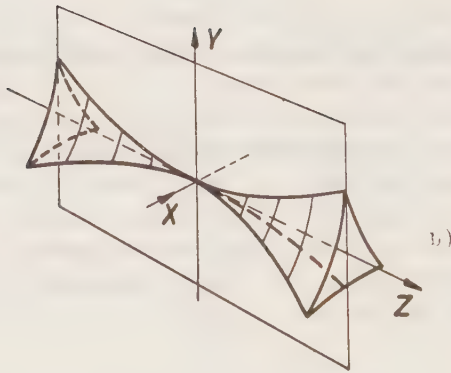
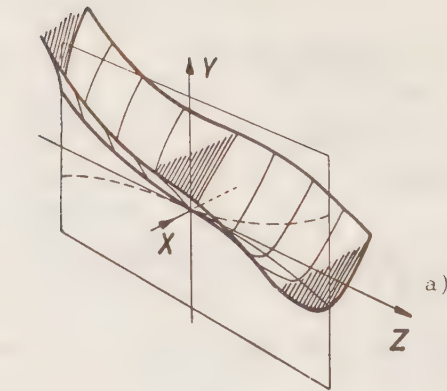


Abb. 3 Schematische Darstellung der Kaustikfläche für
 $q_8 q_{13} > 0$ bzw. $q_8 q_{13} < 0$ nach Grumm

I.3

Basisebene und Kaustikbedingung nach H. Grumm

Zur Untersuchung der Bündelquerschnitte wollen wir Aberrationskurven benutzen und wie Grumm eine besondere Ebene einführen, die Basisebene, die wir im folgenden näher beschreiben werden. Wir gehen bei unseren Überlegungen immer von einem im Querschnitt kreisförmigen Strahlenbündel aus, das bei abgeschaltetem Ablenkfeld auf den Mittelpunkt des Auffangschirms fokussiert ist. Lenkt man dieses Bündel über den Proportionalitätsbereich hinaus ab, so treten die oben dargestellten Fehler auf und das Bündel wird entsprechend dem vorliegenden Kaustiktyp deformiert. Wir denken uns nun eine Ebene, in der das Bündel in der verwendeten Näherung der Fehlerberechnung noch kreisförmig ist. Das ist natürlich vor dem Ablenkfeld immer der Fall. Man kann sich aber vorstellen, daß eine solche Ebene auch im Ablenkfeld vorhanden sein kann. Bei der Berechnung der Fehlerkoeffizienten wird ja ein Störungsverfahren einer bestimmten Ordnung benutzt, und es könnte daher sein, daß auch im Feld der Bündelquerschnitt in dieser speziellen Näherung nicht von einem Kreis unterschieden werden kann. In einer solchen Ebene mit kreisförmigem Bündelquerschnitt betrachten wir die Elektronenstromdichte, deren Komponente in z-Richtung dargestellt werden kann als

$$J(u,v) = \frac{C}{D} \quad \text{mit} \quad D = \frac{\partial(P,Q)}{\partial(u,v)} , \quad (3.1)$$

wobei u und v bzw. P und Q die Koordinaten in der Basis- bzw. Schirmebene bedeuten sollen und $C(u, v) \cdot du \cdot dv$ die Anzahl der pro Zeiteinheit durch ein Flächenelement $du \cdot dv$ hindurchtretenden Elektronen wiedergibt. Nehmen wir an, daß die Basisebene gleichmäßig von Elektronen durchsetzt wird, so können wir $C = 1$ setzen. Die Funktionaldeterminante D liefert dann die Isophotenbedingung

$$D = \frac{1}{f} , \quad (3.2)$$

d.h. wir erhalten für vorgegebene konstante Werte von J Kurven, die Orte gleicher Stromdichte verbinden. Je nach Kaustiktyp nimmt die Isophotenbedingung dann entsprechend den Gleichungen (2.6) bzw. (2.18) die Form (3.3) bzw. (3.4) an.

$$D = 4(v^2 - u^2) - 1 = \frac{1}{J} \quad (3.3)$$

$$D = -4(u^2 + v^2) + 1 = \frac{1}{J} \quad (3.4)$$

Für $J = \infty$ erhält man die Isophoten maximaler Intensität, die Kaustiklinien. Die Kaustikbedingungen lauten daher

$$v^2 - u^2 = \frac{1}{4} \quad a_1 a_3 > 0 \quad (3.5)$$

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{4} \quad a_1 a_3 < 0 \quad (3.6)$$

II Beschreibung des Querschnittes abgelenkter Bündel durch Aberrationskurven

II.4 Allgemeine Entwicklung der Ablenkaberrationskurven

Den Ausgangspunkt für die Untersuchungen dieses Kapitels bilden die Gleichungen (1.6) für die Abweichungen der Strahldurchstoßpunkte der realen von denen der idealen oder Gaußschen Bahnen in der Schirmebene. Wir können diese Gleichungen unter zwei Voraussetzungen vereinfachen. Die Normalform der Elektronenbahnen war für beliebige Lage des unabgelenkten Strahlenbündels hergeleitet worden. Es bedeutet also keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir im folgenden eine koaxiale Lage des unabgelenkten Bündels mit $x_s = y_s = 0$ annehmen, d.h. wenn der Brennfleck bei abgeschaltetem Ablenkkfeld im Nullpunkt des Schirmkoordinatensystems liegt. Zweitens soll sich die Strahlenquelle weit außerhalb des Ablenkkfeldes befinden, d.h. die Ableitung des Feldes $B'(z_a)$ verschwinden. Dadurch reduzieren sich die Gleichungen (1.6) auf die Ausdrücke

$$\Delta x = a_4 x_s' + 2a_5 x_s' y_s' \quad (4.1)$$

$$\Delta y = a_5 + a_5 y_s' + a_6 x_s'^2 + a_7 y_s'^2.$$

Wir gelangen jetzt zu einer Darstellung der Aberrationskurven unter Benutzung der Normalform, wenn wir in (4.1) die Transformationen des Kapitels I.2 vornehmen. Nach (2.3) ersetzen wir die Strahlneigungen x_s' und y_s' und gelangen mit den Gleichungen (2.8), (2.11) und (2.13) für $a_8 a_{13} > 0$ bzw. (2.8), (2.20) und (2.22) für $a_8 a_{13} < 0$ zu den Ausdrücken für die Aberrationskurven, die wir für die beiden Normalformen im folgenden zusammenstellen:

$$\underline{a_3 a_{13} > 0}$$

$$\begin{aligned} \Delta X &= a_8 \sqrt{\frac{a_{13}}{a_8}} \left(\frac{a_5 a_8 - a_4 a_{13}}{2 a_8 a_{13}} \right)^2 \{ 2uv - u \} \\ &= a_8 \sqrt{\frac{a_{13}}{a_8}} \left(\frac{a_5 a_8 - a_4 a_{13}}{2 a_8 a_{13}} \right)^2 \tilde{P} = a_{13} \left(\frac{a_5 a_8 - a_4 a_{13}}{2 a_8 a_{13}} \right)^2 \tilde{P} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= a_1 - a_5 \frac{a_5 a_8 + a_4 a_{13}}{4 a_8 a_{13}} + a_{13} \left(\frac{a_5 a_8 + a_4 a_{13}}{4 a_8 a_{13}} \right)^2 + a_{13} \left(\frac{a_5 a_8 - a_4 a_{13}}{2 a_8 a_{13}} \right)^2 \{ u^2 + v^2 + v \} \\ &= a_1 - a_5 \frac{a_5 a_8 + a_4 a_{13}}{4 a_8 a_{13}} + a_{13} \left(\frac{a_5 a_8 + a_4 a_{13}}{4 a_8 a_{13}} \right)^2 + a_{13} \left(\frac{a_5 a_8 - a_4 a_{13}}{2 a_8 a_{13}} \right)^2 Q \\ &= a_1 - a_5 \frac{a_5 a_8 + a_4 a_{13}}{4 a_8 a_{13}} + a_{13} \left(\frac{a_5 a_8 + a_4 a_{13}}{4 a_8 a_{13}} \right)^2 + a_{13} \left(\frac{a_5 a_8 - a_4 a_{13}}{2 a_8 a_{13}} \right)^2 \tilde{Q} \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$u = \tilde{u} \quad v = \sqrt{\frac{a_{13}}{a_8}} \tilde{v} \quad P = \sqrt{\frac{a_{13}}{a_8}} \tilde{P} \quad Q = \tilde{Q} \quad (4.4)$$

$$\underline{a_3 a_{13} < 0}$$

$$\begin{aligned} \Delta X &= a_8 \sqrt{\left| \frac{a_{13}}{a_8} \right|} \left(\frac{a_5 a_8 - a_4 a_{13}}{2 a_8 a_{13}} \right)^2 \{ 2uv + u \} \\ &= a_8 \sqrt{\left| \frac{a_{13}}{a_8} \right|} \left(\frac{a_5 a_8 - a_4 a_{13}}{2 a_8 a_{13}} \right)^2 \tilde{P} = a_{13} \left(\frac{a_5 a_8 - a_4 a_{13}}{2 a_8 a_{13}} \right)^2 \tilde{P} \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= a_1 - a_5 \left(\frac{a_5 a_8 + a_4 a_{13}}{4 a_8 a_{13}} \right) + a_{13} \left(\frac{a_5 a_8 + a_4 a_{13}}{4 a_8 a_{13}} \right)^2 + a_{13} \left(\frac{a_5 a_8 - a_4 a_{13}}{2 a_8 a_{13}} \right)^2 \{ u^2 - v^2 + v \} \\ &= a_1 - a_5 \left(\frac{a_5 a_8 + a_4 a_{13}}{4 a_8 a_{13}} \right) + a_{13} \left(\frac{a_5 a_8 + a_4 a_{13}}{4 a_8 a_{13}} \right)^2 + a_{13} \left(\frac{a_5 a_8 - a_4 a_{13}}{2 a_8 a_{13}} \right)^2 Q \\ &= a_1 - a_5 \left(\frac{a_5 a_8 + a_4 a_{13}}{4 a_8 a_{13}} \right) + a_{13} \left(\frac{a_5 a_8 + a_4 a_{13}}{4 a_8 a_{13}} \right)^2 + a_{13} \left(\frac{a_5 a_8 - a_4 a_{13}}{2 a_8 a_{13}} \right)^2 \tilde{Q} \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$u = \tilde{u} \quad v = \sqrt{\left| \frac{a_{13}}{a_8} \right|} \tilde{v} \quad P = \sqrt{\left| \frac{a_{13}}{a_8} \right|} \tilde{P} \quad Q = \tilde{Q}$$

Wir wenden uns jetzt speziellen Gleichungen von Aberrationskurven und von Schnittlinien der Kaustikfläche mit der Schirmebene zu und wollen die beiden verschiedenen Typen - sternförmig bzw. rinnenförmig - getrennt behandeln. Wir beginnen mit dem sternförmigen Fall, auf den uns frühere Untersuchungen über Ablenkfehler zunächst geführt hatten (7), als wir die Koeffizienten a_1 für ein einfaches eisenloses magnetisches Ablenkssystem berechneten. Es ergab sich der Fall $a_8 a_{13} < 0$ mit $a_{13} < 0$.

II.4.1 Aberrationskurven für den Fall $a_8 a_{13} < 0$.

Wir betrachten wieder ein Elektronenstrahlbündel, das bei abgeschaltetem Ablenkfeld kreisförmigen Querschnitt hat und auf den Schirmmittelpunkt fokussiert ist (Abb. 4).

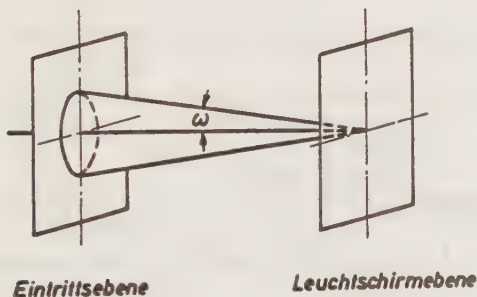


Abb. 4. Zur Definition des unabgelenkten Elektronenstrahlbündels

Alle Einzelstrahlen des Bündels können durch Angabe ihres Schirmschnittpunktes und ihrer Neigung an dieser Stelle bestimmt werden. Für die Strahlneigungen x'_S und y'_S machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} x'_s &= -\omega \cos \vartheta \\ y'_s &= -\omega \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Wir beschreiben also das unabgelenkte Bündel durch den halben Öffnungswinkel des Strahlenkegels, auf dessen Mantel der betreffende Strahl liegt, wie aus Abb. 4 ersichtlich ist. Setzen wir (4.7) in (4.1) ein, so erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta x &= a_2 \omega^2 \sin 2\vartheta - a_4 \omega \cos \vartheta \\ \Delta y &= a_1 - a_5 \omega \sin \vartheta + \frac{1}{2} \omega^2 \{ (a_2 + a_{13}) + (a_2 - a_{13}) \cos 2\vartheta \} \end{aligned} \quad (4.8)$$

für die Aberrationskurven in der Schirmebene (9), aus denen sich unmittelbar ablesen läßt, daß drei verschiedene Einzelfehler auftreten können. In der Abb. 5 sind diese qualitativ dargestellt.

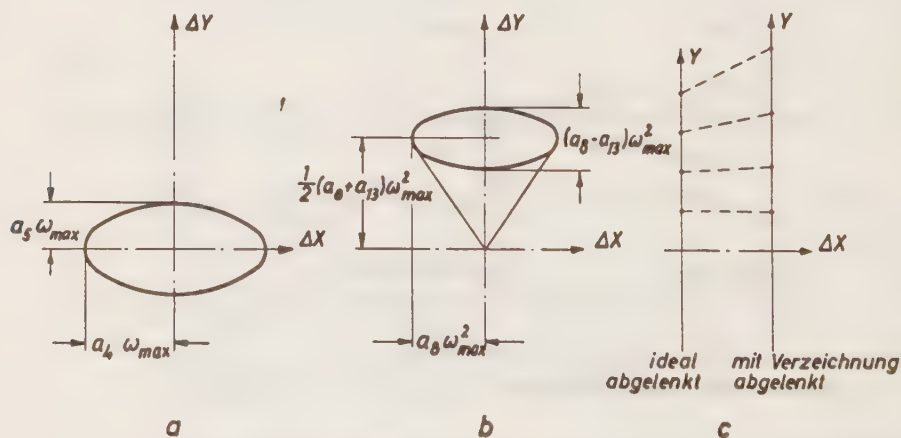


Abb. 5 Durch Astigmatismus a), Koma b) und Verzeichnung c) entstehende Fehlerfiguren

Man erkennt, daß das von der Strahlrichtung unabhängige Glied a_1 die Abweichung von der Proportionalität zwischen der Auslenkung des Elektronenstrahls und dem angelegten Feld, den sogenannten Proportionalitätsfehler oder die Ablenkverzeichnung wiedergibt. Die von der Endlichkeit des Strahlquerschnitts verursachten Fehler sind durch Terme mit a_4 , a_5 , a_8 und a_{13} gegeben. Die Glieder, die den halben Öffnungswinkel ω in erster Ordnung enthalten - mit a_4 und a_5 verknüpft - liefern die elliptischen Aberrationskurven des astigmatischen Fehlers (Abb. 5a), während die Glieder in ω^2 den Komafehler beschreiben (Abb. 5b). Die Ablenkung mit Verzeichnung - für den Fall positiven Vorzeichens - ist in Abb. 5c verglichen mit der idealen Ablenkung dargestellt.

In den Koordinaten der Basisebene erhalten wir aus (4.7) und den Transformationen des Kapitels I.2

$$u = \frac{2q_1 q_{13}}{q_1 q_1 - q_4 q_3} \sqrt{\left| \frac{q_1}{q_3} \right|} \omega \cos \vartheta \quad (4.9)$$

$$v = \frac{2q_1 q_3}{q_1 q_1 - q_4 q_3} \omega \sin \vartheta + \frac{1}{2} (q_1^2 q_1^2 - q_4^2 q_3^2)$$

oder in den kartesischen Koordinaten $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ gemäß den Beziehungen (2.16)

$$\tilde{u} = \frac{2q_1 q_{13}}{q_1 q_1 - q_4 q_3} \sqrt{\left| \frac{q_1}{q_3} \right|} \omega \cos \vartheta \quad (4.10)$$

$$\tilde{v} = \frac{2q_1 q_{13}}{q_1 q_1 - q_4 q_3} \sqrt{\left| \frac{q_1}{q_3} \right|} \omega \sin \vartheta + \frac{1}{2} \sqrt{\left| \frac{q_1}{q_3} \right|} (q_1^2 q_1^2 - q_4^2 q_3^2)^2$$

Das Gleichungspaar (4.10) beschreibt konzentrische Kreise, wenn wir dem Parameter ω verschiedene Werte zuteilen. Der Mittelpunkt dieser Basiskreise ist um einen Betrag aus dem Ursprung des $\tilde{u}, \tilde{v}$ -Systems verschoben, der durch eine Kombination von Fehlerkoeffizienten bestimmt wird. Der Radius dieser Kreise enthält ebenfalls die Fehlerkoeffizienten und außerdem den halben Öffnungswinkel ω des jeweiligen Strahlenkegels. In

der Schirmebene erhalten wir den Basiskreisen entsprechende Kurven, die durch die Gleichungen (4.8) gegeben sind, die Aberrationskurven. Wir können uns also die Aberrationskurven in der Schirmebene als "Bilder" solcher Basiskreise (vgl. Einleitung) vorstellen. In der Abb. 9 ist diese Transformation der Kreise in die Aberrationskurven zusammen mit den zugehörigen Kaustikquerschnitten, die im folgenden untersucht werden, dargestellt.

II.5 Kaustikfläche für den Fall $a_8 a_{13} < 0$

Für die Kaustik hatte sich im Fall $a_8 a_{13} < 0$ die Beziehung (3.6) ergeben. Wir setzen hierin ebenfalls wieder $u = \tilde{u}$ und $v = \sqrt{\frac{q_{13}}{q_1}} \tilde{v}$ ein. Damit erhalten wir die Bedingung

$$\tilde{u}^2 + \left| \frac{q_{13}}{q_1} \right| \tilde{v}^2 = \frac{1}{4} . \quad (5.1)$$

In der Basisebene $\tilde{u}, \tilde{v}$ wird sie erfüllt durch den Ansatz

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{1}{2} \cos \vartheta \\ \tilde{v} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q_1}{q_{13}}} \sin \vartheta . \end{aligned} \quad (5.2)$$

Die Basiskurve der Kaustik ist also eine Ellipse in Mittelpunktslage, deren Achsenverhältnis durch den Wert des Ausdrucks $\sqrt{\frac{q_1}{q_{13}}}$ bestimmt wird. Sie ist in der Abb. 9 im oberen Teil zusammen mit einigen Kreisen in der Basisebene dargestellt. Die Gleichungen (5.2) führen wir jetzt in die Transformationsgleichungen (2.17) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{q_1}{q_{13}}} \{ \sin 2\vartheta + 2 \cos \vartheta \} \\ \tilde{q} &= \frac{1}{4} \{ \cos 2\vartheta + 2 \sin \vartheta \} \end{aligned} \quad (5.3)$$

womit wir mit (4.5) und (4.6) zu den Gleichungen der Kau-
stiklinien gelangen. Sie sind in das folgende Schema einge-
tragen, in dem wir die bisher erhaltenen Ergebnisse zusam-
menfassend darstellen wollen:

	Basisebene	Trans- formation	Leuchtschirmebene	
Aber- rations- kurven	$\tilde{u} = a \cos \vartheta$ $\tilde{v} = a \sin \vartheta + b$	$\tilde{P} = \tilde{P}(\tilde{u}, \tilde{v})$ $\tilde{Q} = \tilde{Q}(\tilde{u}, \tilde{v})$	$\Delta x = c \sin 2\vartheta + d \cos \vartheta$ $\Delta y = e + f \sin \vartheta + g \cos 2\vartheta$	(5.4)
Kaustik	$\tilde{u} = h \cos \vartheta$ $\tilde{v} = i \sin \vartheta$	(2.17)	$\Delta x = j(\sin 2\vartheta + 2 \cos \vartheta)$ $\Delta y = k + l(\cos 2\vartheta + 2 \sin \vartheta)$	

Gleichungszusammenstellung

Die Abkürzungen a bis l bedeuten dabei:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{2a_2 a_{13}}{a_2 a_3 - a_4 a_{13}} \left| \sqrt{\frac{a_2}{a_{13}}} \right| & b &= \frac{1}{2} \left| \sqrt{\frac{a_2}{a_{13}}} \right| (a_5^2 a_3^2 - a_4^2 a_{13}^2) \\
 c &= a_3 \omega^2 & d &= -a_4 \omega & e &= a_1 + \frac{1}{2} (a_2 + a_{13}) \omega^2 \\
 f &= -a_3 \omega & g &= \frac{1}{2} (a_2 - a_{13}) \omega^2 & h &= \frac{1}{2} \\
 i &= \frac{1}{2} \left| \sqrt{\frac{a_2}{a_{13}}} \right| & j &= \frac{1}{4} a_{13} \left| \sqrt{\frac{a_2}{a_{13}}} \right| \left(\frac{a_2 a_3 - a_4 a_{13}}{2 a_2 a_{13}} \right)^2 \\
 k &= a_1 - a_{13} \left(\frac{a_2 a_3 + a_4 a_{13}}{4 a_2 a_{13}} \right) + a_{13} \left(\frac{a_5 a_3 + a_4 a_{13}}{4 a_2 a_{13}} \right)^2 & l &= -\frac{1}{4} a_{13} \left(\frac{a_2 a_3 - a_4 a_{13}}{2 a_2 a_{13}} \right)^2
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

Aus der Zusammenstellung der Gleichungen (5.4) ergibt sich für die Leuchtschirmebene, daß die Ausdrücke ähnlich gebaut sind, man kann also erwarten, daß in besonderen Fällen ähnliche Kurven entstehen, etwa Aberrationskurven, die der sternförmigen Gestalt der Kaustik nahekomen.

II.6 Spezielle Aberrationskurven für ein einfaches eisenloses Ablenkssystem

Wir wollen jetzt einige Aberrationskurven betrachten, die für ein eisenloses Ablenkssystem berechnet wurden, das zur elektronenoptischen Bank (10) des Instituts gehört. Sie sind in der Abb. 6 dargestellt. Die Kurven wurden bei konstanter Ablenkung für verschiedene Durchmesser von Kreisen berechnet. Kleinen Kreisen, d.h. kleinen Öffnungswinkeln des Strahlenkegels entsprechen die ellipsenähnlichen Figuren im Inneren auf der linken Seite der Abbildung. Hier liegt noch fast reiner Astigmatismus vor. Beim Übergang zu größeren Winkeln bilden sich dann Spitzen und Schleifen, die immer größer werden und dann rückwärts laufend erneut die inneren Gebiete überdecken, bis sie endlich die zweifach umschriebene Ellipse des Komafehlerscheibchens bilden. Zwischen den drei Darstellungen wurde der Maßstab jeweils reduziert, da es hier nur auf den Typ der Kurven ankommt.

Die ersten rechnerisch und experimentell bestimmten Aberrationskurven wurden 1939 von Wendt (8) angegeben. Sie unterscheiden sich jedoch völlig von denen der Abb. 6. Sie sind im rechten unteren Teil der Abb. 9 wiedergegeben. Die Kurven von Wendt ähneln anfangs noch den unsrigen, haben dann aber keine nach außen gerichteten Schleifen, die sich aus Spitzen entwickelt haben, sondern weisen nur eine nach innen gerichtete Schleife auf. Wir können diesen Unterschied leicht erklären, wenn wir die jeweils vorliegenden Ablenkfeldverteilungen und die daraus resultierenden Fehlerkoeffizienten betrachten. Im Kapitel III.7.1 werden wir die Basiskurve der Kaustik

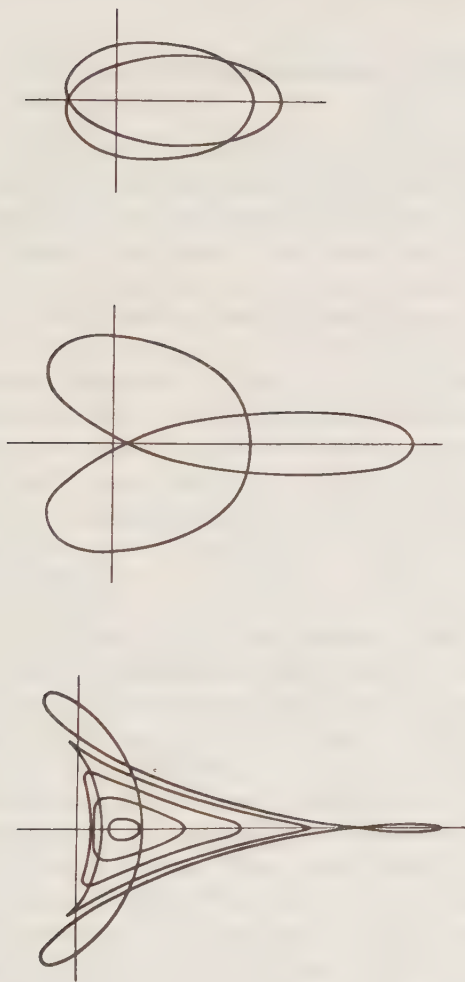


Abb. 6 Für magnetische Ablenkung berechnete Aberrationskurven entsprechend Kreisen wachsenden Durchmessers. Die Schnittpunkte der Koordinatenkreuze bezeichnen jeweils den Ort des Brennflecks bei idealer Ablenkung.

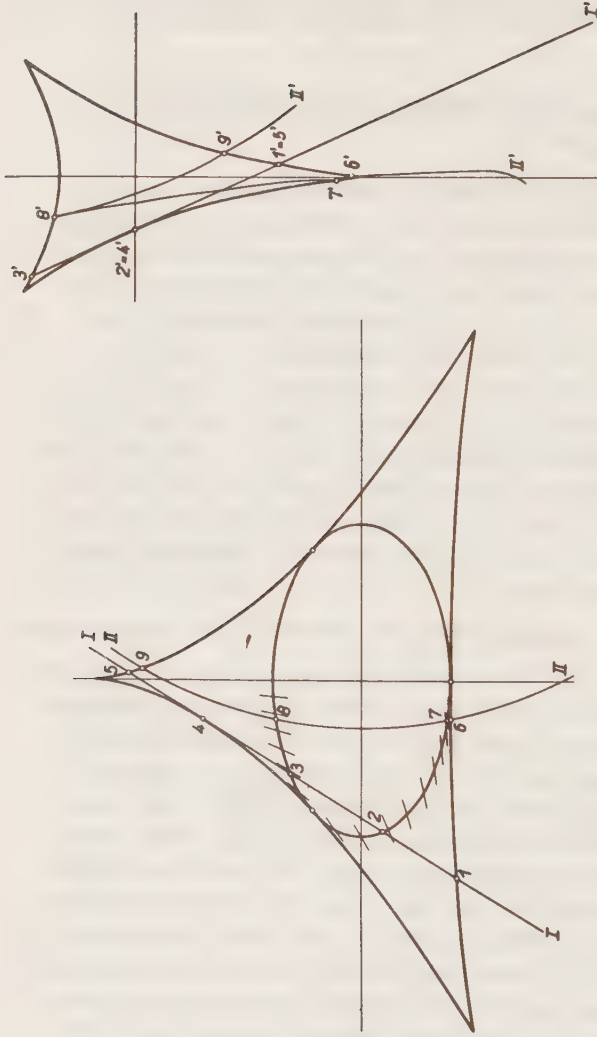
und die entsprechenden Kreise in der Basisebene berechnen
und diese dann mit Hilfe der Transformationsbeziehungen
auf die Schirmebene übertragen.

III Systematik der Aberrationskurven durch Untersuchung der Beziehungen zwischen Basis- und Schirmebene

III.7 Basiskurve, Primärgeraden und Primärhüllkurve für $a_8 a_{13} < 0$

In der Abb. 7 sind Basis- und Schirmebene nebeneinander dargestellt. Entsprechend den Gleichungen (5.2) haben wir die Basiskurve der Kaustik als Ellipse in Mittelpunktslage in der $\tilde{u}, \tilde{v}$ -Ebene gezeichnet. Das Verhältnis zwischen Haupt- und Nebenachse ergab sich aus der Beziehung zwischen a_8 und a_{13} , die für das oben erwähnte Ablenssystem $a_8 = -1/3 a_{13}$ lautet. Die Einhüllende aller, die Basisebene in dieser Ellipse durchsetzenden Strahlen ist die Kaustikfläche. Ihr Schnitt mit der Schirmebene ist die sternförmige Figur im rechten Teil der Abb. 7. Bei der Berechnung dieser Kurve gemäß der Schirmgleichung für die Kaustik nach (5.4) haben wir allerdings die für den betrachteten Satz von Fehlerkoeffizienten konstante Verschiebung in der y -Richtung k (5.5) sowie die Maßstabsfaktoren $a_{13} \left(\frac{a_5 a_8 - a_4 a_3}{2 a_4 a_3} \right)^2$ weggelassen. Es handelt sich also um eine $\tilde{P}, \tilde{Q}$ -Darstellung nach (5.3). An mehreren Stellen der Basiskurve in Abb. 7 sind kurze Linien eingezeichnet, die bestimmte Richtungen in diesen Punkten festlegen sollen. Die Konstruktion dieser Linien wird aus der Abb. 8 ersichtlich, bei der wir durch eine affine Verzerrung um den Faktor $\sqrt{|\frac{a_8}{a_{13}}|}$ zu einer kreisförmigen Basiskurve übergegangen sind. Jeder Fahrstrahl unter einem Winkel α erzeugt einen Punkt auf dem Kreisumfang, in dem in der angegebenen Weise der Winkel β eingetragen wird, wobei die Beziehung $\beta = -\alpha/2$ besteht⁺⁾ . Die unter dem Winkel β den Kreis schneidenden Geraden wollen wir Primärgeraden nennen, deren Einhüllende, die sternförmige Figur, die die Kaustikbasiskurve einschließt, soll Primärhüllkurve heißen. Wird diese

⁺⁾ Vgl. dazu Anhang 1)



Basisebene

Basiskurve der Kaustik mit
Primärhüllkurve und Testobjekten

Schirnebene

Kaustiklinie mit Schattenprojektion
der Testobjekte

Abb. 7 Kaustik magnetisch abgelenkter Bündel für den Fall $a_8 = -1/3 a_{13}$

Primärhüllkurve auf die Schirmebene transformiert, so ergibt sich dort wieder die Kaustiklinie⁺). Es werden also nicht nur die Strahlen des Bündels, die die Basisebene in der Grümmschen Basiskurve durchsetzen, auf die Kaustik abgebildet, sondern auch solche aus äußeren Gebieten, und zwar gerade diejenigen, die von der Primärhüllkurve ausgehen. Das Innere der Basiskurve wird auf das Innere des Kaustiksterns abgebildet, ebenso aber auch die drei Teilflächen innerhalb der Primärhüllkurve, außerhalb des Kreises (Abb. 8) bzw. der Ellipse (Abb. 7). Die Kaustiklinie und die von ihr umschlossene

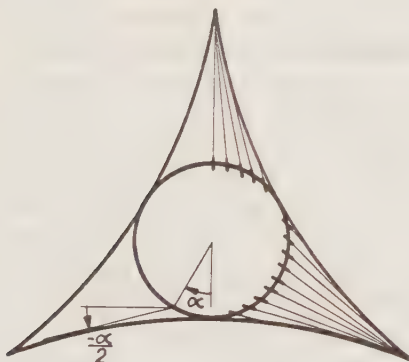


Abb. 8 Konstruktion der Primärgeraden und der Primärhüllkurve

Fläche auf dem Schirm werden auf diese Weise von je vier Einzelbildern überdeckt. Als Bildpunkt jedes der drei in der Abb. 7 durch unbezifferte Ringe markierten Berührungspunkte

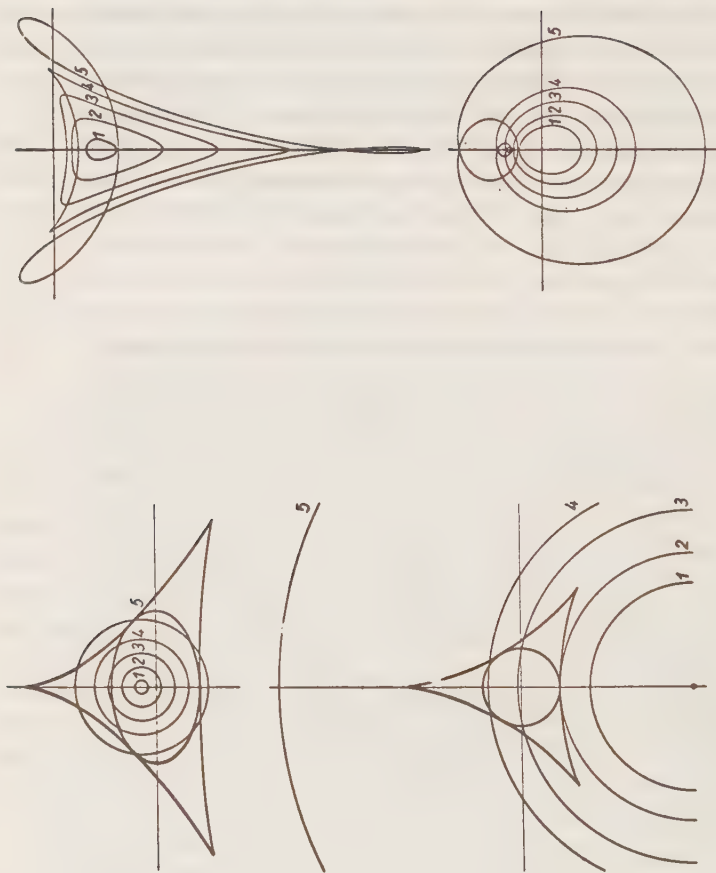
⁺) Beweis vgl. Anhang 2)

zwischen Basis- und Primärhüllkurve erhalten wir auf dem Schirm eine Kaustikspitze. In diesen Punkten hat die Tangente an die Basiskurve die gleiche Richtung wie die entsprechende Primärgerade, was zu einer Spitze führt. Wir wollen allgemein eine solche Richtung - in den Abb. 7, 8 durch die eingezeichneten kurzen Linien repräsentiert - im folgenden Spitzenrichtung nennen. Hat nämlich ein Objekt, etwa ein Blendenrand, in einem solchen Punkt gerade die so definierte Richtung, so weist die dem Objekt entsprechende Linie auf dem Schirm eine Spitze auf. Wir können jetzt leicht mit Hilfe von gedachten Testobjekten in der Basisebene die Eigenschaften der Transformation untersuchen.

III.7.1 Abbildung von Testobjekten für $a_8 a_{13} < 0$.

Betrachten wir wieder die Abb. 7. Dort ist als Testobjekt eine Primärgerade unter der Bezeichnung I eingezeichnet. Im Punkt 3 schneidet sie die Basiskurve in der Spitzenrichtung, sie muß also auf dem Schirm in 3' mit einer Spitze auf die Kaustik zulaufen. Im Punkt 2 ist diese Bedingung nicht erfüllt, wir erhalten in einem solchen Fall auf dem Schirm einen Berührungspunkt, hier 2'. Der Punkt 2' muß auf der Kaustik liegen, da 2 der Basiskurve angehört. In den Bereichen zwischen 1 und 2 bzw. zwischen 2 und 3 verläuft die Gerade I in Gebieten, die auf das Innere der Kaustik abgebildet werden, 2' muß also ein Berührungspunkt sein. Dagegen liefern Schnittpunkte mit der Primärhüllkurve auf dem Schirm Schnittpunkte mit der Kaustiklinie, es sind hier die Punkte 1 - 1', 5 - 5'. Allgemein gehen Geraden bei der Transformation in Kurven über, nur im Sonderfall einer Primärgeraden ergibt sich wieder eine Gerade. Sie wird doppelt durchlaufen, der Umkehrpunkt liegt auf der Kaustik. Wir wollen jetzt die Transformation des Kreisbogens II untersuchen. Er besitzt zwei Schnittpunkte mit der Basiskurve, wobei nur die Tangente im Punkt 8 die "richtige" Richtung hat, was auf dem Schirm in 8' zu einer Spitze führt. Für den Punkt 7 erhalten wir den Berührungspunkt 7'.

Wir hatten bereits auf die von Wendt (8) angegebenen Aberrationskurven hingewiesen und ihre Verschiedenheit von unseren Kurven hervorgehoben. Durch die Betrachtung der entsprechenden Kreise als Testobjekte in der Basisebene und ihrer Lage in Bezug auf die Basiskurve der Kaustik können wir diese Verschiedenheit jetzt leicht erklären. Wir betrachten dazu die Abb. 9, in deren linker Hälfte die mit 1 bis 5 bezeichneten konzentrischen Kreise eingezeichnet sind. Bei ihrer Darstellung wurde berücksichtigt, daß der Mittelpunkt der Basiskurve der Kaustik nicht mit dem der Kreise zusammenfällt, sondern gegenüber diesem um einen Betrag verschoben ist. Dieser wird durch eine Kombination von Ablenkfenlerkoeffizienten nach Gleichung (4.10) bestimmt. Die Schirmebene auf der rechten Seite der Abbildung zeigt die entsprechenden Aberrationskurven. Das unterschiedliche Aussehen der Aberrationskurven wird verständlich, wenn man die Schnittpunkte der Kreise mit Basis- und Primärhüllkurve betrachtet. Spitzen, die dann bei wachsendem Durchmesser in Schleifen übergehen, können nur auftreten, wenn die Tangenten des Kreises im Schnittpunkt mit der Basiskurve Primärgeraden sind. Dies kann für den im oberen Teil der Abb. 9 dargestellten Fall genau dreimal eintreten, es können also drei Spitzen entstehen, und zwar wegen der Symmetrie zuerst die beiden oberen, dann die untere. Anders ist es im zweiten Fall, der nach den von Wendt (8) angegebenen Werten für die Fehlerkoeffizienten berechnet wurde. Für sein Ablenkssystem ergab sich die Beziehung $a_8 = -a_{13}$, was zu einer kreisförmigen Basiskurve der Kaustik führt. Die Werte für die anderen Fenlerkoeffizienten, die den Betrag der Verschiebung zwischen Kreis- und Basiskurvenmittelpunkt bestimmen, lieferten eine Verschiebung in der eingezeichneten Weise. Betrachten wir wieder die Schnittpunkte zwischen Kreisen und Basiskurve, so finden wir, daß die Spitzenrichtung nur in einem einzigen Punkt der Basiskurve erzielt werden kann. Es ergibt sich also lediglich eine Spitze, und zwar diejenige der Kurve 2 in der Schirmebene.



Basissebene

Schirmebene

Abb. 9 Konzentrische Kreise mit verschiedener Mittelpunktslage in Bezug auf die Basiscurve der Kaustik und zugehörige Aberrationskurven für $ag_{13} < 0$.

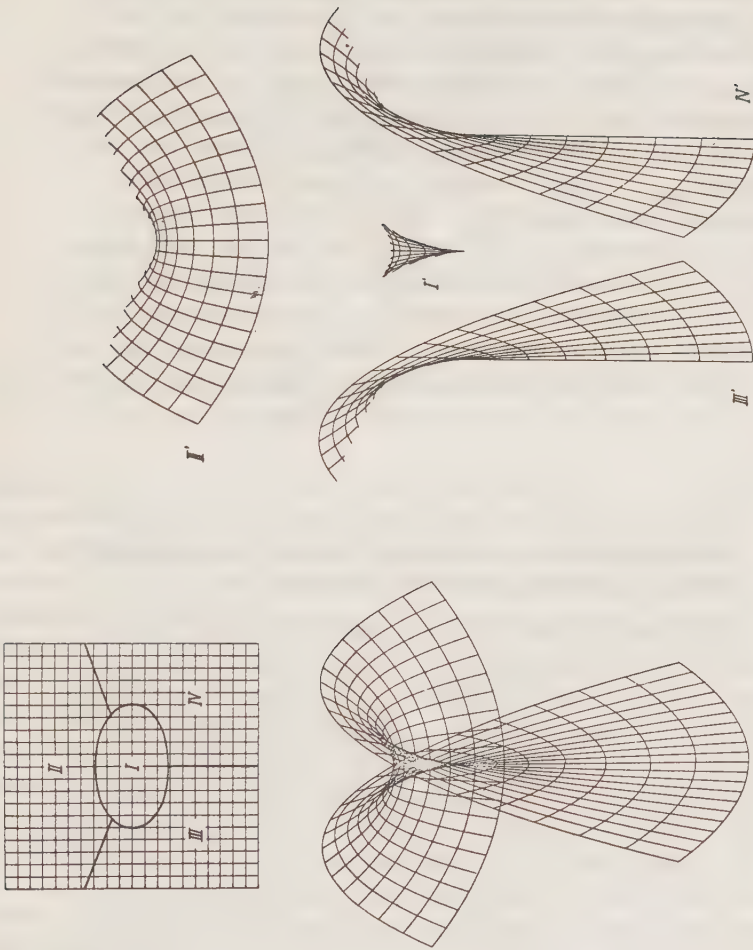


Abb. 10 Transformation eines quadratischen Netzes durch ein abgelenktes Bündel
für $a_{g13} < 0$

Daß die Schleifen einmal nach außen, zum anderen nach innen gerichtet sind, läßt sich leicht mit Hilfe der Abb. 10 verstehen, die als Testobjekt ein quadratisches Netz in der Basisebene und dessen Transformation auf den Schirm zeigt. Der Übersichtlichkeit halber wurde das Netz in der Basisebene entlang der Basiskurve und entlang dreier Geraden zerschnitten, die durch die Punkte laufen, die in die Kaustikspitzen übergehen. Die Zahlen geben an, in welcher Weise sich die Teilnetze entsprechen. Der Berechnung der Netze lag ein Verhältnis $a_8/a_{13} = -\frac{1}{3}$ zu Grunde; für $a_8/a_{13} = 1$ enthält man die entsprechende Abbildung, wenn man das Netz in der Basisebene im Verhältnis $1:\sqrt{3}$ streckt bzw. in der Schirmebene staucht. Durch Einzeichnen eines Testobjektes in das Basis-ebenenetz und punktweises Übertragen in das Schirmmnetz erhält man leicht das Bild des Testobjektes. Das Gesamtbild der Abb. 10 liefert zudem aus der Dichte der Linien einen qualitativen Überblick über die Intensitätsverteilung.

III.7.2 Sekundärhüllkurve und Übersicht über die möglichen Typen von Aberrationskurven für $a_8a_{13} < 0$

Durch die Kenntnis der Netztransformation ist es möglich, unter Berücksichtigung der topologischen Eigenschaften der Basis- und Primärhüllkurve, sowie einer dritten ausgezeichneten Kurve in der Basisebene, der Sekundärhüllkurve, eine Übersicht über die Typen von Aberrationskurven zu geben, die bei der Ablenkung von Elektronenstrahlbündeln entstehen können. Die Sekundärhüllkurve ist in der Abb. 11 dargestellt. Sie ist die Einhüllende aller Normalen der Primärgeraden in dem Schnittpunkt mit der Basiskurve, in dem in Spitzenrichtung geschnitten wird. Eine Aberrationskurve hat - wie wir bereits früher gefunden haben - nur dann eine Spitze, wenn der Basiskreis die Basiskurve in Spitzenrichtung schneidet.

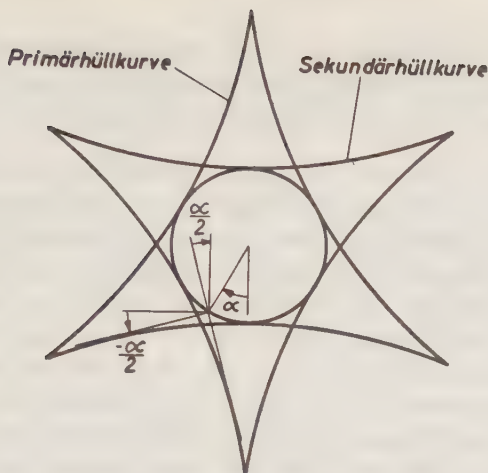


Abb. 11 Konstruktion der Sekundärgeraden und der Sekundärhüllkurve

Jetzt können wir diese Bedingung auch mit Hilfe der Sekundärgeraden formulieren. Eine Spitze entsteht dann, wenn der Kreismittelpunkt auf der im Basiskurvenschnittpunkt zur Spitzenrichtung senkrecht verlaufenden Sekundärgeraden liegt. Durch die Sekundärhüllkurve wird die Basisebene in einen Innen- und einen Außenbereich eingeteilt. Durch jeden im Inneren liegenden Punkt gehen drei Sekundärgeraden. Laßt man also von diesem Punkt aus einen Kreis allmählich wachsen, so können höchstens drei Spitzen entstehen. Liegt der Kreismittelpunkt außerhalb der Sekundärhüllkurve, so läßt sich nur eine Tangente an diese legen, und die Aberrationskurven können nur eine Spitze haben. Für beide Fälle gilt zudem: Überschreitet der wachsende Kreisradius den für eine Spitze der Aberrationskurve charakteristischen Wert, so schneidet der Kreis die zugehörige Primärgerade in vom Schnittpunkt mit der Basiskurve gleichabständigen Punkten. Diese gehen bei der Transformation⁺⁾

⁺⁾ vgl. Anhang 3

auf den Schirm in einen Doppelpunkt der Aberrationskurve über. Unmittelbar nach dem Erscheinen einer Spitze wird daher bei weiterem Wachsen des Kreisradius eine Schleife erzeugt.

Wir wollen jetzt die Abb. 12 betrachten. Dort sind Aberrationskurven für verschiedene Lagen des Kreismittelpunktes bezüglich der Sekundärhüllkurve qualitativ dargestellt. Diese verschiedenen Lagen ergeben sich aus den Werten der Ablenkfehlerkoeffizienten für verschiedene Formen von Ablenkfeldern. Liegt der Kreismittelpunkt etwa in I, so ergeben sich die Aberrationskurven der ersten Zeile im rechten Teil der Abb. 12; entsprechend II, III und IV. Die ersten drei Zeilen enthalten Aberrationskurven, die nach anfänglichen Unterschieden schließlich zur gleichen Figur führen, während sich für den Punkt IV, der außerhalb der Sekundärhüllkurve liegt, ein neuer Typ ergibt. Der Punkt V liefert keine grundsätzlich neuen Kurven, es tritt lediglich eine Drehung auf. Alle Aberrationskurven wurden qualitativ durch Übertragen von Testkurven aus der Basisebene in die Schirmebene mit Hilfe der Netztransformation und der Kenntnis der Abbildungsart für die Umgebung von Schnittpunkten des Testobjektes mit Basis- und Primärhüllkurve - Schnittpunkt oder Berührungspunkt mit der Kaustik auf dem Schirm - gewonnen, also nicht berechnet. Sie wurden bezüglich der Lage der Kaustik dargestellt, die gestrichelt gezeichnet ist, solange die Aberrationskurven diese noch nicht berührt haben. Bei weiterer Vergrößerung des Öffnungswinkels ω führt Schleifenbildung zu mehrfacher Überdeckung bestimmter Bereiche der Schirmebene und damit zur Entstehung der Kaustiklinie, die dann in der Abb. 12 durch dickere Striche gekennzeichnet ist. Wir haben diesen Sachverhalt in der Abbildung mit "nicht sichtbar" bzw. "ausgeleuchtet" bezeichnet, was so verstanden werden soll, daß in dem Raum zwischen Basis- und Schirmebene natürlich stets eine Fläche vorhanden ist, die alle Strahlen einhüllt, also eine Kaustik und damit eine Schnittlinie dieser Fläche mit der Schirmebene, daß aber die oben behandelte Kaustik-

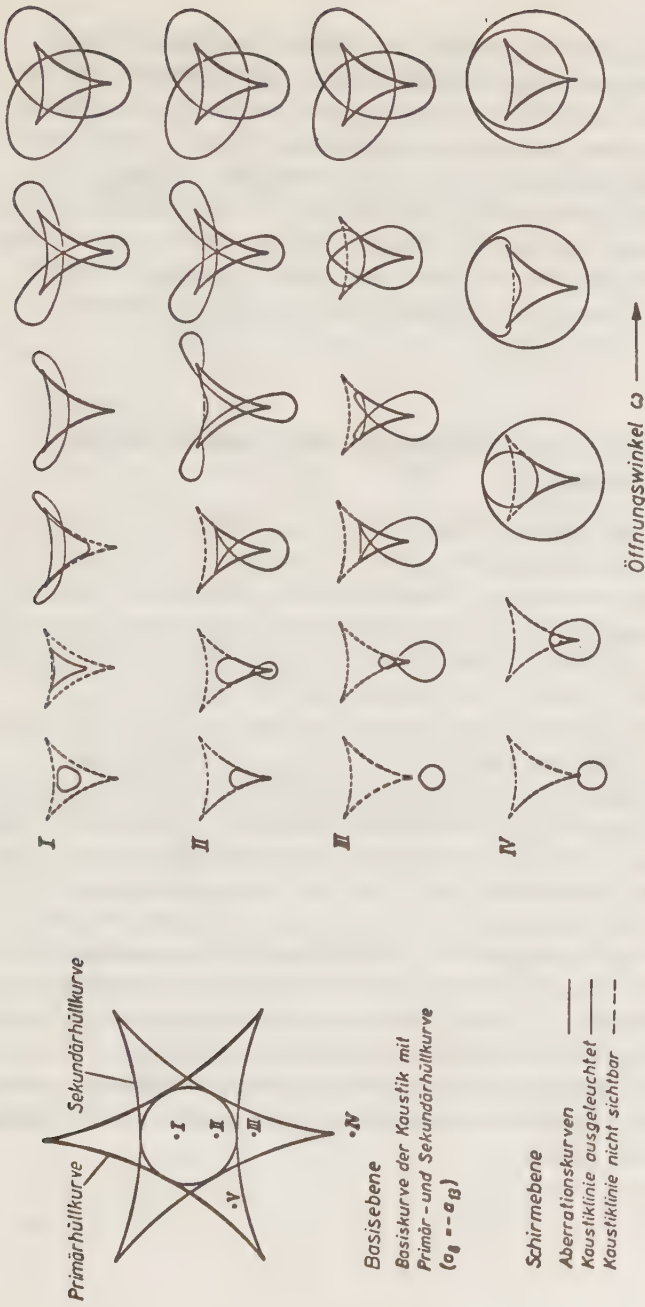


Abb. 12 Übersicht über die Aberrationskurven und Querschnitte abgelenkter Bündel für wachsende Öffnungswinkel ω und verschiedene Lagen des Schnittpunktes der Bündelachse mit der Basisebene (I bis IV, entsprechend verschiedenen Feldformen) für den Fall $ag_{A3} < 0$.

bedingung je nach der Öffnung des Bündels eventuell noch nicht für alle diejenigen Punkte des Leuchtschirms erfüllt ist, durch die bei weiterer Öffnung die Kaustiklinie führen wird. Aus der Lage des Kreismittelpunktes in der Basisebene, die nur von der Geometrie der Ablenkanordnung abhängig ist, läßt sich also voraussagen, welchem Typ die Aberrationskurven angehören werden, welche Bündelbegrenzungen auftreten und wie sich der Bündelquerschnitt für einen Kreisquerschnitt durch Überlagerung aller in ihm enthaltenen Kreise ergeben wird.

III. 8 Basiskurve, Primärgeraden und Primärhüllkurve für $a_8 a_{13} > 0$

In den vorangegangenen Abschnitten und im Kapitel II hatten wir Aberrationskurven untersucht, die sich für eine im Institut häufig benutzte Ablenkanordnung ergaben. Sie gehörten dem sternförmigen Fall der Grümmschen Typenunterscheidung für die Kaustikfläche an - dies ergab sich aus der für die Fehlerkoeffizienten a_8 und a_{13} resultierenden Relation $a_8 a_{13} < 0$. Wir wollen nun den zweiten, rinnenförmigen Typ (Abb. 3a) untersuchen, der auftritt, wenn für a_8 und a_{13} die Bedingung $a_8 a_{13} > 0$ besteht (?). Für diesen hypothetischen Fall ist uns bisher kein ausgeführtes Ablenssystem bekannt geworden, so daß wir über keine konkreten Werte der Ablenkfehlerkoeffizienten verfügen. Wir betrachten daher nur die Kaustikbedingung (3.5) und die, die Abbildung in die Schirmebene vermittelnde Relation (2.6). Wir untersuchen also die Bündelquerschnitte in der u, v- und der P, Q-Ebene. Bei Kenntnis der Fehlerkoeffizienten würden wir ohnehin nur Gleichungen der Typen (4.2), (4.3) für die Aberrationskurven bzw. eine Kaustikgleichung nach (5.4) erhalten, d.h. gegenüber der P, Q-Darstellung ergäbe sich eine um einen Maßstabfaktor und eine Verschiebung in der y-Richtung veränderte Abbildung.

Den Ausgangspunkt unserer Überlegungen bildet also wieder die Kaustikbedingung. Sie lautet hier

$$v^2 - u^2 = \frac{1}{4}. \quad (3.5)$$

Diese gleichseitige Hyperbel - im linken Teil der Abb. 13 -

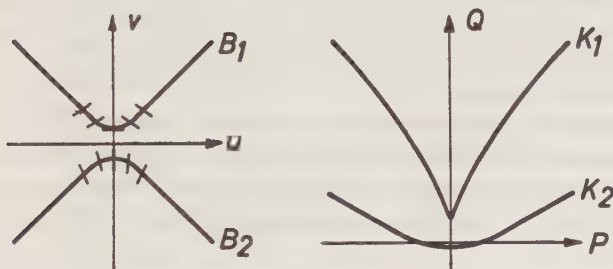


Abb. 13 Basiskurve und Kaustik magnetisch abgelenkter Bündel für $a_8 a_{13} > 0$

stellt die Basiskurve der Kaustik dar, die im rechten Teil wiedergegeben ist. Diese besteht ebenfalls aus zwei Ästen, die denen der Hyperbel entsprechen und durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} P &= 2uv - u \\ Q &= u^2 + v^2 + v \end{aligned} \quad (2.6)$$

beschrieben werden. Alle die Basiskurve durchsetzenden Elektronenstrahlen werden auf die Kaustik abgebildet. An mehreren Stellen der Basiskurve haben wir wieder kurze Linien eingezeichnet, die bestimmte Richtungen festlegen sollen und zwar wie im Fall der sternförmigen Kaustik die Richtungen der Primärgeraden.⁺) Wir finden wieder, daß die Kaustik auf dem

⁺) vgl. Anhang 4)

Schirm eine Spitze aufweist, wenn die Tangente an die Basis-
kurve in dem betreffenden Punkt eine solche Primärgerade ist.
Alle diese Primärgeraden erzeugen wieder eine Hüllkurve. Sie
ist in der Abb. 14, die auch die Konstruktion der Primärgeraden
demonstriert, dargestellt. Um die Primärgerade in einem
beliebigen Punkt A zu finden, verbinden wir A mit dem unteren
Scheitelpunkt S der Hyperbel und tragen den entstehenden Win-
kel α in der angegebenen Weise in A ab. Die so erzeugten
Geraden liefern die mit P_1 und P_2 bezeichneten Äste der Pri-
märhüllkurve, die hier nicht wie im sternförmigen Fall ge-
schlossen ist, sondern entsprechend den beiden Hyperbeln aus
zwei Teilen besteht. Alle Punkte der Primärhüllkurve füh-
ren bei der Transformation ebenfalls zu Punkten der Kaustik,
und zwar werden Punkte der Linien B_1 , P_1 und P_2 auf den Kau-
stikast K_1 , solche von B_2 auf K_2 transformiert. Wir haben

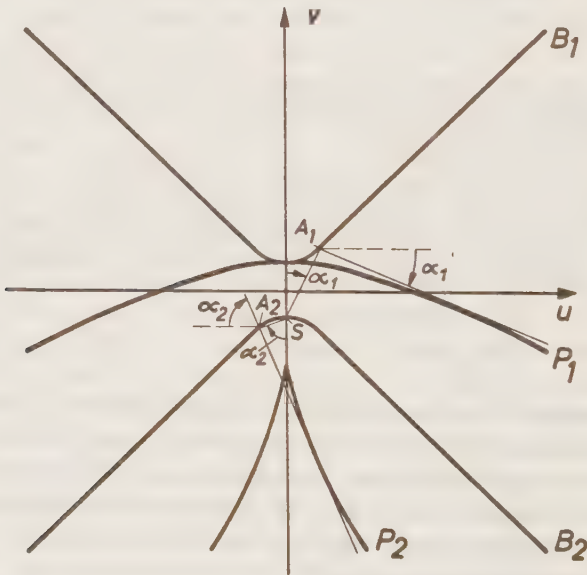


Abb. 14 Konstruktion der Primärgeraden und der
Primärhüllkurve für $a_8 a_{13} > 0$

also wie im sternförmigen Fall weitere, durch ihre Durchstoßpunkte entlang der Primärhüllkurve in der Basisebene festgelegte Strahlen gefunden, die den Schirm in der Kaustiklinie durchsetzen. Da bei der Transformation von B_2 , P_1 und P_2 eine Seitenumkehr bezüglich der Symmetrieachse $u = 0$ bzw. $P = 0$ stattfindet, wird die Schirmebene innerhalb der Rinne K_1 insgesamt vierfach überdeckt, zwischen K_1 und K_2 doppelt, und lediglich im Gebiet unterhalb von K_2 finden wir keine Punkte von Strahlen aus der Basisebene. Die Kaustiklinie K_2 stellt also eine scharfe Grenze zwischen Hell und Dunkel dar.

Wir wollen noch die Sekundärgeraden betrachten. Sie waren definiert als die Normalen der Primärgeraden in dem Schnittpunkt mit der Basiskurve, in dem die Spitzenrichtung vorliegt. Aus einfachen Winkelbeziehungen ergibt sich für $|a_8| = |a_{13}|$, daß hier im rinnenförmigen Fall die Verbindungsstrecken zwischen dem Scheitelpunkt S und den Schnittpunkten A zwischen Basiskurve und den Primärgeraden auf diesen senkrecht stehen und daher die gesuchten Sekundärgeraden sind. Nach dem Konstruktionsprinzip der Abb. 14 gehen also alle Sekundärgeraden durch den Scheitel S, d.h. ihre Hüllkurve ist zu diesem Punkt entartet. Wir werden weiter unten entsprechend der Übersicht über die möglichen Typen von Aberrationskurven für den sternförmigen Fall auf die Lage der Kreismittelpunkte bezüglich dieser entarteten Sekundärhüllkurve noch eingehen, wollen uns aber im folgenden zunächst mit Testobjekten beschäftigen, um die Transformation in die Schirmebene besser kennenzulernen.

III.8.1 Transformation von Testobjekten für $a_8 a_{13} > 0$

Betrachten wir die Abb. 15. Dort sind im linken Teil, in der Basisebene, eine Gerade und ein Kreisbogen eingezeichnet. Die Gerade I schneidet im Punkt 3 die Basiskurve in Spitzenrichtung, 3' muß also auf dem Schirm eine Spitze darstellen. Im Punkt 5 ist diese Bedingung nicht erfüllt.

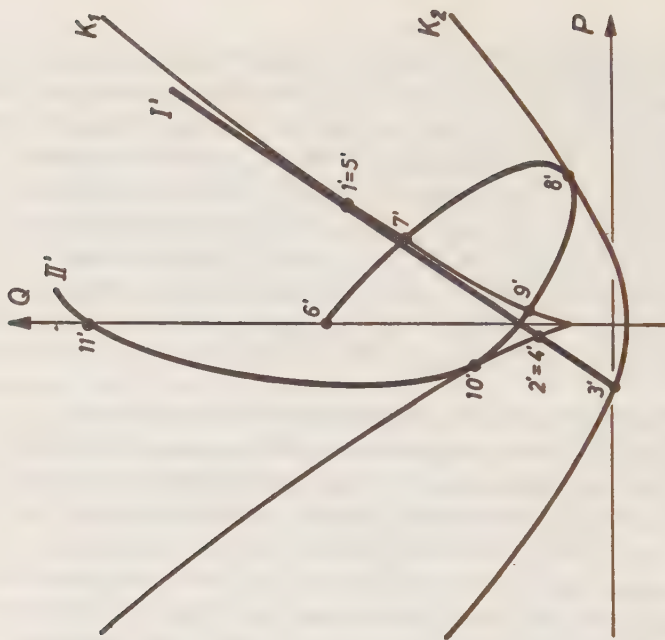
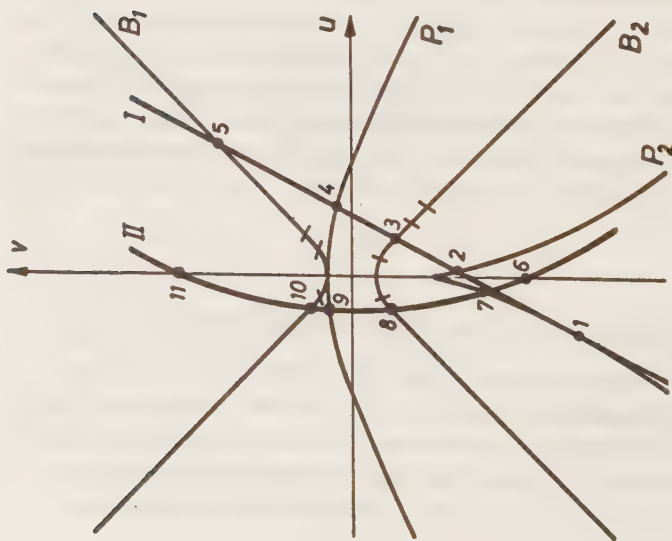


Abb. 15 Qualitative Untersuchung von Testobjekten in der Basisebene und deren Transformation in die Schirmebene für $a_{g13} > 0$

Wir erhalten auf dem Schirm den Berührungspunkt $5'$. Schnittpunkte mit der Primärhüllkurve liefern immer Schnittpunkte mit der Kaustik, hier $2 - 2'$ und $4 - 4'$, während der Berührungspunkt 1 in den Berührungspunkt $1'$ übergeht. Da die Gerade in 1 die Primärhüllkurve berührt, handelt es sich um eine Primärgerade. Sie geht wieder in eine Gerade über, die doppelt durchlaufen wird mit dem Umkehrpunkt $3'$, während im allgemeinen Geraden auf Kurven abgebildet werden. Die besonderen Abstandsverhältnisse zwischen den Schnittpunkten in der Basisebene $\overline{23} = \overline{34}$, $\overline{12} = \overline{45}$ und das Zusammenfallen der Bilder $2'$ und $4'$ bzw. $1'$ und $5'$ sind ebenfalls nur eine Eigenschaft der Primärgeraden. Sie wird im Anhang 4) ausgenutzt, um die Primärgeradenrichtung zu berechnen, was die Grundlage der Konstruktion der Abb. 14 liefert. Im Fall des Kreisbogens II haben wir andere Verhältnisse. Kurven gehen im allgemeinen wieder in Kurven über - einen Sonderfall werden wir weiter unten kennenlernen. In den Schnittpunkten 8 und 10 liegt die Spitzenrichtung nicht vor, wir müssen daher Berührungspunkte erhalten, $8'$ und $10'$. Die Schnittpunkte mit der Primärhüllkurve 7 und 9 liefern die Schnittpunkte $7'$ und $9'$ mit der Kaustiklinie auf dem Schirm. Im nächsten Abschnitt wollen wir zu realen Objekten übergehen und einige Aberrationskurven als Bilder von Kreisen untersuchen.

III.8.2 Aberrationskurven für $a_3 a_{13} > 0$

In den folgenden Abbildungen haben wir wieder Basis- und Schirmebene nebeneinander dargestellt. Auf den Kreisen in der Basisebene liegen die Durchstoßpunkte derjenigen Strahlen des Bündels, die auf dem Mantel eines Strahlenkegels liegen, dessen Öffnungswinkel durch den jeweiligen Kreisradius bestimmt ist. Kleinen Kreisen - also kleinen Öffnungswinkeln entsprechen die kleinen noch wenig deformierten Kurven. Aus der Lage des Kreismittelpunktes auf der v -Achse ergibt sich

für die drei Fälle der Abb. 16, daß die Basiskurve nur einmal in Spitzenrichtung geschnitten werden kann, und zwar im oberen Scheitelpunkt der Hyperbel. Ob die Spitzen der kleinen Kurven - in Abb. 16a bzw. b - nach oben oder nach unten zeigen, hängt davon ab, ob sich die Basiskreise von unten bzw. oben der Basiskurve nähern. Wird der Punkt mit der Spitzenrichtung vom Kreis überschritten, so entsteht eine Schleife, die dann für wachsenden Radius immer größer wird. Insgesamt können höchstens acht Punkte entstehen, die auf der Kaustik liegen. Im allgemeinen sind das vier Berührungs- und vier Schnittpunkte, wenn die Basiskurve viermal "falsch" geschnitten bzw. die Primärhüllkurve viermal überquert wird. Unter bestimmten Bedingungen können einige der Punkte zusammenfallen; einen wichtigen dieser Sonderfälle stellt die Abb. 17 dar. Der Kreismittelpunkt fällt dort mit der zu einem Punkt entarteten Sekundärhüllkurve zusammen, und es ergeben sich als Aberrationskurven die auf dem Schirm eingezeichneten Geraden. Sie sind jedoch lediglich die Bilder der Kreise, ein Kreisquerschnitt (Lochblende) würde ein Bild erzeugen, das nach unten durch die Kaustikrinne K_2 , nach oben durch die dem Rand der Blende entsprechende Gerade begrenzt wäre. Wir werden weiter unten den Sonderfall der Abb. 17 benutzen, um wie im sternförmigen Kaustikfall die Basisebene mit einem Netz zu überziehen, das mit Hilfe des entsprechenden Netzes in der Schirmebene die Transformation von Testobjekten ermöglicht. Zuvor wollen wir noch Kreise betrachten, deren Mittelpunkte außerhalb der Symmetrieachse ($u = 0$) liegen. In der Abb. 18 sind Aberrationskurven für solche Fälle dargestellt. Es zeigt sich, daß keine neuen Typen - etwa mit mehreren Schleifen - hinzukommen, die Kurven werden lediglich verzerrt.

III.8.3 Übersicht über die möglichen Typen von Aberrationskurven für $a_8 a_{13} > 0$

Wir wollen jetzt analog zum Abschnitt III.7.2 die Basisebene mit einem Netz überziehen, um ein handliches In-

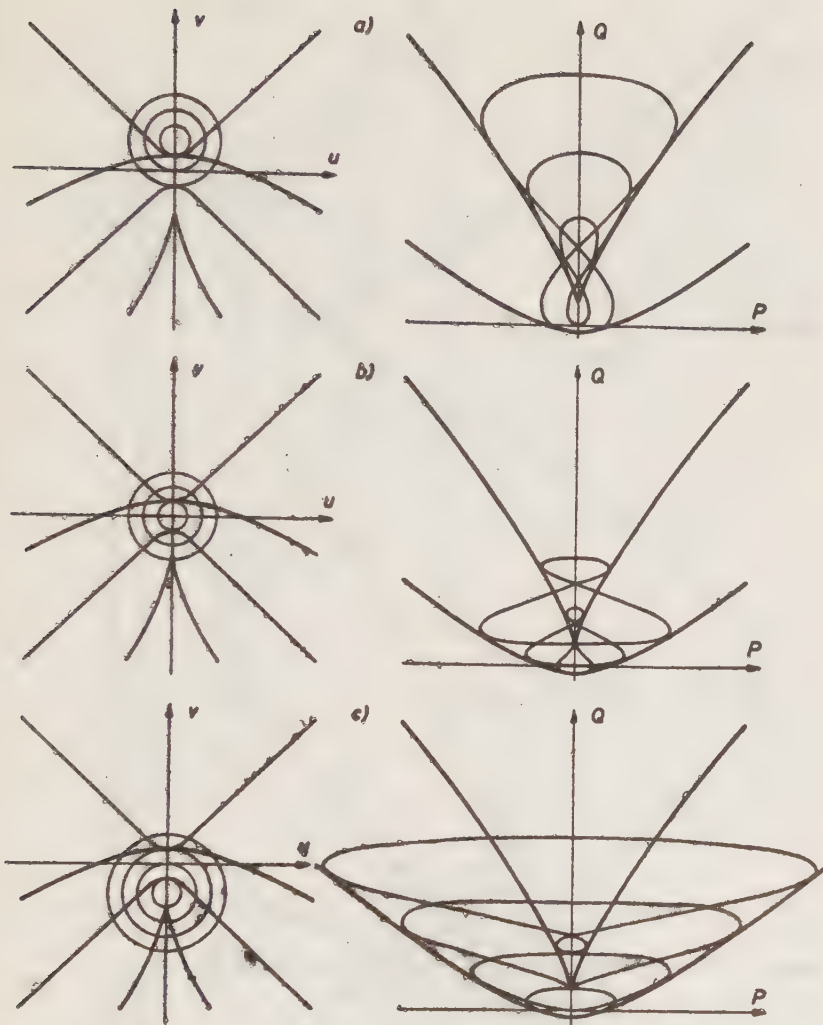


Abb. 16 Kreise verschiedener Größe und Lage in Bezug auf die Basiskurve und zugehörige Aberrationskurven für $a_8 a_{13} > 0$

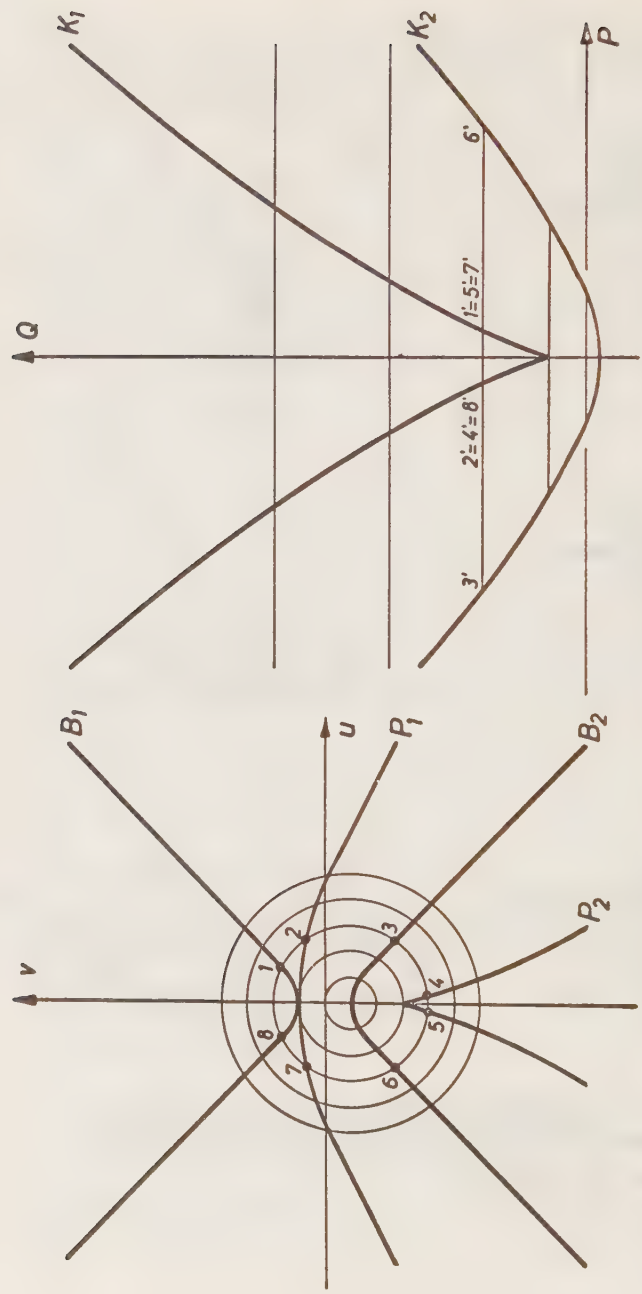


Abb. 17 Sonderfall der Lage des Kreissystems in der Basisebene und zugehörige, zu Geraden entartete Aberrationskurven in der Schirmebene für $ag_{13} > 0$

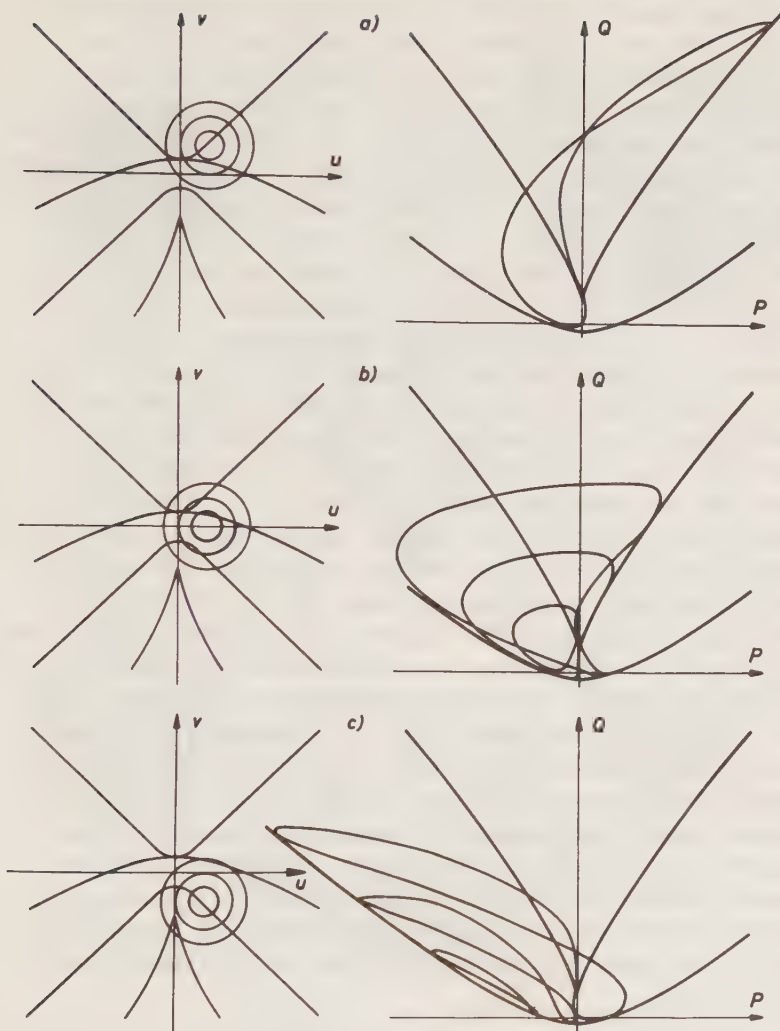


Abb. 18 Kreise außerhalb der Symmetrieachse $u = 0$ mit verschiedener Größe und Lage in Bezug auf die Basiskurve und zugehörige Aberrationskurven für $a_8 a_{13} > 0$

strument zu erhalten, mit dem wir leicht die Bilder von Testobjekten und damit insbesondere Aberrationskurven graphisch untersuchen können. Ein quadratisches Netz wie im Fall der sternförmigen Kaustik läßt sich hier nicht verwenden, da sein Bild zu unübersichtlich wird. Wir benutzen daher den Fall der Mittelpunktslage der Kreise, der in Abb. 17 dargestellt ist. Fällt der Mittelpunkt mit der zu einem Punkt entarteten Sekundärhüllkurve im unteren Scheitelpunkt S der Hyperbel zusammen, so werden die zugehörigen Kreise auf gerade Linien in der Schirmebene abgebildet. Diese werden in der in der Abb. 17 durch die Bezeichnung der Schnittpunkte 1 - 8 und deren Bilder 1' - 8' gekennzeichneten Art teilweise mehrfach durchlaufen und durch die untere Kaustikrinne K_2 begrenzt. In der Abb. 19 haben wir links oben die Basisebene dargestellt. Das Netz besteht aus Kreisen um S und Sekundärgeraden, die im Winkelabstand von 10° eingetragen wurden, um das Netz aufzuspannen. Den acht Basisteilbereichen I - VIII entsprechen die Schirmbereiche I' - VIII'. Da mehrere Gebiete der Basisebene auf jeweils ein Gebiet der Schirmebene übergehen, haben wir die Basisebene entlang den beiden Ästen der Basiskurve zerschnitten. An letzterer tritt ja stets eine Umkehr der Bildkurve auf, sei es in spitzer oder in berührender Form. Die Bildkurven von Linien, die die Primärhüllkurve schneiden, laufen auch auf dem Schirm stetig in ein anderes Gebiet weiter, daher wurden die betreffenden Schirmgebiete zusammengezeichnet. Rechts neben dem Basisnetz der Abb. 19 haben wir im Schirmnetz alle Einzelbilder übereinandergezeichnet, um aus der Dichte der Linien wieder einen Überblick über die Intensitätsverhältnisse zu geben. Man erkennt deutlich, daß sich in der Nähe der Kaustiklinie die Netzlinien stark häufen, besonders in der Nähe der Spitze von K_1 und des tiefsten Punktes der Rinne K_2 .

Mit Hilfe dieser Netztransformation und der Abb. 16 und 18 der Aberrationskurven können wir wieder eine qualitative Übersichtsdarstellung der Typen von Aberrationskurven

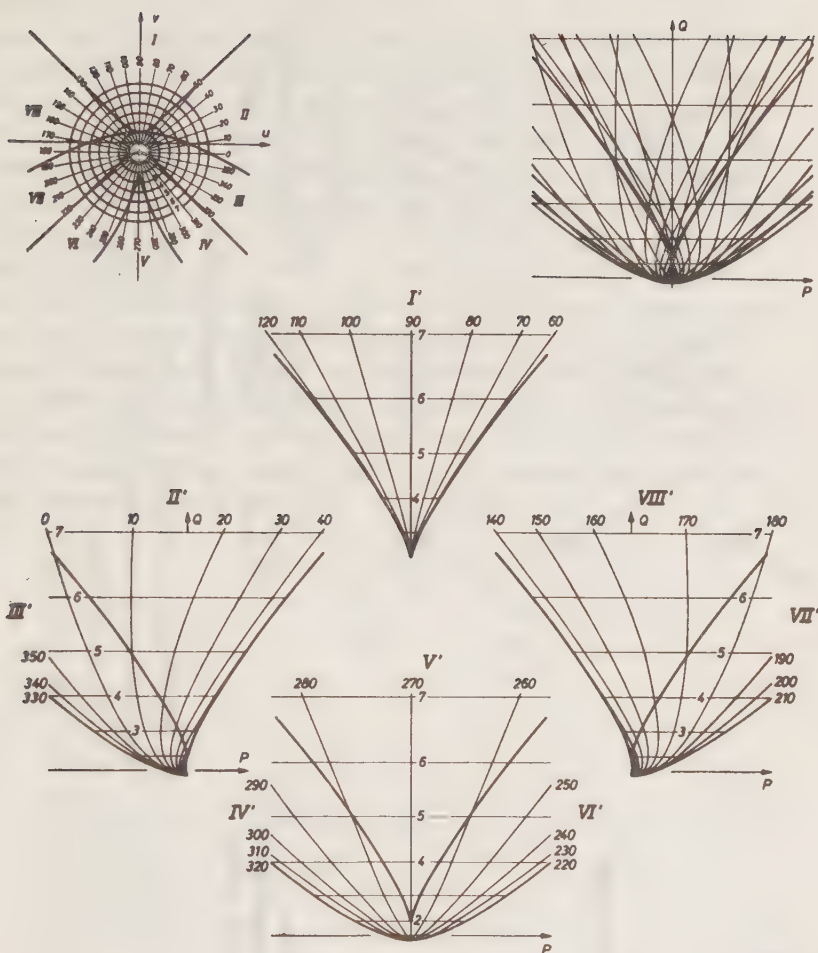


Abb. 19 Transformation eines Netzes in der Basisebene auf den Schirm durch ein abgelenktes Bündel für $a_{813} > 0$



Basissebene
Basiskurve der Kausitik
 $a_g \cdot a_B > 0$

Schirmsebene
Aberrationskurven —
Kausitlinie ausgeleuchtet —
Kausitlinie nicht sichtbar ----

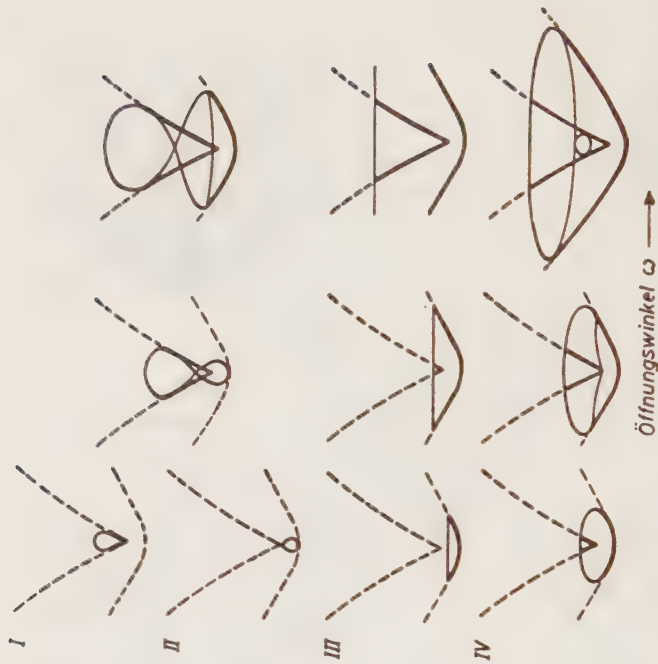


Abb. 20 Übersicht über die Aberrationskurven und Querschnitte abgelenkter Bündel für wachsende Öffnungswinkel ω und verschiedene Lagen des Schnittpunktes der Bündelachse mit der Basissebene (I bis IV, entsprechend verschiedenen Feldformen) für den Fall $a_g a_B > 0$.

gewinnen. Wir hatten oben gefunden, daß die Sekundärhüllkurve zu einem Punkt entartet ist, der mit dem unteren Scheitelpunkt S der Hyperbel zusammenfällt. (Abb. 14) In der Abb. 20 haben wir die Kreismittelpunkte I bis IV in verschiedenen Abständen von S eingezeichnet und wollen jetzt die Bilder von Kreissystemen in diesen Punkten betrachten. Liegt der Mittelpunkt oberhalb von S, so erhalten wir für wachsenden Radius die Kurven der Bildzeilen I und II, die nach anfänglichen Unterschieden zum gleichen Typ führen. Für die Mittelpunktslage in S bzw. darunter erhalten wir die Zeilen III bzw. IV. Insgesamt können wir feststellen, daß lediglich ein Typ von Aberrationskurven möglich ist, daß sich stets Kurven in Form einer 8 ergeben. Beide Augen werden jeweils durch eine Kaustikrinne begrenzt, im Sonderfall III fallen beide auf einer Geraden zusammen. Der Punkt S wäre der einzig mögliche Mittelpunkt für das Auftreten von 2, 3 oder 4 Spitzen; die entsprechenden Aberrationskurven entarten dann aber zu den Geraden der Spalte III.

Anhang

- 1) Bestimmung der Richtung der Primärgeraden
für $a_8 a_{13} < 0$

Wir suchen eine Gleichung für die Primär- und Sekundärgeraden und wählen dazu für die Basis- und Schirmebene je eine komplexe Darstellung. Es sei:

$$\bar{b} = u + iv \quad (\text{A.1})$$

$$S = P + iQ. \quad (\text{A.2})$$

b soll für Basisebene stehen, S bezeichne die Schirmebene.

Im Fall der sternförmigen Kaustik gilt:

$$P = 2uv + u$$

$$Q = u^2 - v^2 + v.$$

Damit erhalten wir für die Schirmebene

$$S = P + iQ = u + iv + i(-2iuv + u^2 - v^2)$$

$$\text{oder } S = \bar{b} + i\bar{b}^2, \quad (\text{A.3})$$

$$\text{da } \bar{b} = u - iv.$$

Wir bilden jetzt $\bar{S} = \bar{b} - i\bar{b}^2$ und erhalten für die Kaustikbedingung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial S}{\partial \bar{b}} & \frac{\partial S}{\partial \bar{b}} \\ \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{b}} & \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{b}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2i\bar{b} \\ -2i\bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4\bar{b}^2 = 0, \quad (\text{A.4})$$

woraus sich wieder ein Kreis für die Basiskurve der Kaustik ergibt. Ist $\bar{b}_0 = \gamma + i\delta$ mit reellem t die Gleichung einer Geraden in der Basisebene, so finden wir deren Bild auf dem Schirm mit (A.3) als

$$S_G = f + kt + i(\bar{f}^2 + 2\bar{f}\bar{k}t + \bar{k}^2 t^2). \quad (\text{A.5})$$

Wir hatten bei der Untersuchung von Testobjekten in der Abb. 7 eine Primärgerade und deren Bild betrachtet und gefunden, daß dieses eine Halbgerade ist, die doppelt durchlaufen wird. Den Nullpunkt des Parameters t können wir stets in den Umkehrpunkt legen. Wir müssen daher in Gleichung (A.5) die in t linearen Glieder zum Verschwinden bringen, woraus folgt

$$k + 2i\bar{f}\bar{k} = 0.$$

Da ohne Beschränkung der Allgemeinheit $|h| = 1$ angenommen werden kann, folgt $\bar{f} = \frac{i}{2} k^2$ bzw. $f = -\frac{i}{2} \bar{k}^2$.

Setzen wir $f = -\frac{i}{2} e^{i\alpha}$, so ergibt sich $\bar{k} = e^{i\frac{\alpha}{2}}$ bzw. $k = e^{-i\frac{\alpha}{2}}$ und wir erhalten schließlich die Gleichung der Primärgeraden

$$b_{PG}(\alpha) = -\frac{i}{2} e^{i\alpha} + e^{-i\frac{\alpha}{2}} t. \quad (\text{A.6})$$

Der erste Summand stellt einen Punkt auf der Basiskurve dar - die Kaustikbedingung $b\bar{b} = 1/4$ wird von $b = -\frac{i}{2} e^{i\alpha}$ erfüllt - der zweite Teil ergänzt (A.6) zur Parameterdarstellung einer Geraden durch diesen Punkt. Die Exponenten $i\alpha$ und $-i\frac{\alpha}{2}$ weisen die zur Konstruktion der Primärgeraden benutzte Beziehung auf. Weiter finden wir noch für den Fall $a_8 = -a_{13}$ aus (A.6) durch Bildung der Normalen im Basiskurvenschnittpunkt die Gleichung der Sekundärgeraden

$$b_{SG}(\alpha) = -\frac{i}{2} e^{i\alpha} + ie^{-i\frac{\alpha}{2}} t. \quad (\text{A.7})$$

- 2) Basiskurve und Primärhüllkurve haben beide die Kaustiklinie als Bild

Wir bestimmen zunächst das Bild der Basiskurve, die durch

$$b_B = -\frac{i}{2} e^{i\alpha} \quad (\text{A.8})$$

dargestellt wird. Ihr Bild erhalten wir mit $S_B = b + i \bar{b}^2$ zu

$$S_B = -\frac{i}{2} e^{i\alpha} - \frac{i}{4} e^{-2i\alpha}. \quad (\text{A.9})$$

Die Hüllkurve aller Primärgeraden $b_{PG}(\alpha)$ ergibt sich mit

$$b_{PG} = -\frac{i}{2} e^{i\alpha} + e^{-\frac{i}{2}\alpha} t$$

$$\bar{b}_{PG} = \frac{i}{2} e^{-i\alpha} + e^{i\frac{\alpha}{2}} t$$

$$\text{aus} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial b_{PG}}{\partial \alpha} & \frac{\partial b_{PG}}{\partial t} \\ \frac{\partial \bar{b}_{PG}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \bar{b}_{PG}}{\partial t} \end{vmatrix} = 0$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{i}{2} e^{i\alpha} - \frac{i}{2} e^{-\frac{i}{2}\alpha} t & e^{-\frac{i}{2}\alpha} \\ \frac{i}{2} e^{-i\alpha} + \frac{i}{2} e^{\frac{i}{2}\alpha} t & e^{i\frac{\alpha}{2}} \end{vmatrix} = 0,$$

wodurch wir die Bedingung

$$t = -\frac{i}{2} (e^{\frac{i}{2}\alpha} - e^{-\frac{i}{2}\alpha}) = \sin \frac{\alpha}{2}$$

finden. Das Bild $S_{PH} = b_{PG} + i \bar{b}_{PG}^2$ erhalten wir dann mit diesem Wert von t als

$$S_{PH} = -\frac{i}{2} e^{-2i\alpha} - \frac{i}{4} e^{4i\alpha}. \quad (\text{A.10})$$

Es gleicht demjenigen der Basiskurve (A.9), wenn man α durch -2α ersetzt, d.h. das Bild der Primärhüllkurve fällt mit der Kaustik zusammen; diese wird jedoch bei einmaligem Umlaufen des Winkels α in der Basisebene auf dem Schirm zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen.

3) Abstandsbeziehung für Punkte der Primärgeraden, deren Bilder zusammenfallen

Zwei Punkte der Primärgeraden, deren Bilder auf dem Schirm zusammenfallen, haben zu demjenigen Basiskurvenschnittpunkt p_0 , in dem die Spitzenrichtung vorliegt, den gleichen Abstand. Um dies zu zeigen, schreiben wir die Primärgeradengleichung für zwei verschiedene Punkte p_1 und p_2 an:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + e^{-\frac{i}{2}\alpha} t_1, \\ p_2 &= p_0 + e^{-\frac{i}{2}\alpha} t_2 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

mit $p_0 = -\frac{i}{2} e^{i\alpha}$ und $t_1 \neq t_2$. Wenn $S(p_1) = S(p_2)$ ist, dann folgt

$$p_1 + i\bar{p}_1^2 = p_2 + i\bar{p}_2^2.$$

Setzt man (A.11) ein, so ergibt sich $t_1^2 = t_2^2$ und wegen $t_1 \neq t_2$: $t_1 = -t_2$, d.h. die Punkte p_1 und p_2 liegen symmetrisch zu p_0 .

4) Bestimmung der Richtung der Primärgeraden für $a_8 a_{13} > 0$

Wir wollen in diesem Fall anders vorgehen. Wir suchen Punktepaare in der Basisebene, die das gleiche Bild

in der Schirmebene haben. Wir setzen für solche Punkte

$$u \rightarrow u \pm r, \quad v \rightarrow v \pm s,$$

d.h. wir gehen von einem Punkt p_0 um das gleiche Stück in die eine bzw. die andere Richtung auf der Primärgeraden vorwärts und erhalten aus

$$\begin{aligned} P &= 2uv - u \\ Q &= u^2 + v^2 + v \end{aligned}$$

die Bilder der beiden Punkte

$$\begin{aligned} P^\pm &= 2(u \pm r)(v \pm s) - (u \pm r) \\ Q^\pm &= (u \pm r)^2 + (v \pm s)^2 + (v \pm s). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Bilden wir $P^+ - P^- = 0$ und $Q^+ - Q^- = 0$, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (2v-1)r + 2us &= 0 \\ 2ur + (2v+1)s &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Damit eine nichttriviale Lösung existiert, also zwei wirklich voneinander verschiedene Punkte $(u \pm r, v \pm s)$ vorliegen, muß

$$\begin{vmatrix} 2v-1 & 2u \\ 2u & 2v+1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.15})$$

sein. Dies ist die Gleichung der Basiskurve, die man zur Hyperbelgleichung (3.5) umformen kann. Der Mittelpunkt des Punktepaares liegt also wie im Fall $a_8 a_{13} < 0$ auf der Basis-kurve. Für die Steigung in der Basisebene erhalten wir

$$\frac{1}{2}\beta = \frac{s}{r} = - \frac{2(u+v)-1}{2(u+v)+1}. \quad (\text{A.16})$$

Um daraus eine Winkelbeziehung abzuleiten, benutzen wir die Parameterdarstellung der Basiskurve. Es sei

$$u = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \quad v = \frac{1}{2 \cos \varphi} \quad (\text{A.17})$$

Man überzeugt sich, daß für $-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$ der obere Ast ($v > 0$), für $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ der untere Ast ($v < 0$) erzeugt wird. Man erhält damit aus (A.16)

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{(\operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{\cos \varphi}) - 1}{(\operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{\cos \varphi}) + 1} = - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \quad (\text{A.18})$$

Projizieren wir alle Punkte der Basiskurve aus ihrem unteren Scheitelpunkt S ($u = 0$, $v = -1/2$), so erhalten wir die Steigung

$$\frac{v + \frac{1}{2}}{u} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \quad (\text{A.19})$$

Zusammenfassung

Aufbauend auf der Grümmschen Darstellung der Kaustik eines abgelenkten Elektronenstrahlbündels wurde eine Methode entwickelt, um Aberrationskurven zu untersuchen. Insbesondere konnten sie nach Zahl und Lage ihrer Spitzen und Schleifen klassifiziert werden. Dabei ergaben sich Übersichtsdarstellungen der möglichen Typen solcher Kurven für die beiden von Grümm unterschiedenen kaustikarten. Diese entstehen in Abhängigkeit von den beiden Glaserschen Ablenkfehlerkoeffizienten a_8 und a_{13} , die den Ablenkkomafehler beschreiben, und zwar für die Beziehungen $a_8 a_{13} < 0$ bzw. $a_8 a_{13} > 0$. Es ergab sich ferner für koaxiale Lage des unabgelenkten Strahls, daß die relative Lage der Basiskurven von Kaustik und Aberrationskurven durch eine Kombination der Fehlerkoeffizienten a_4 , a_5 , a_8 und a_{13} bestimmt wird, wobei a_4 und a_5 den Ablenkastigmatismus beschreiben. Da Größe und Gestalt der Aberrationskurven, die sich bei idealer Abbildung zu einem Punkt zusammenziehen, einen unmittelbaren Überblick über die Güte eines Ablenksystems vermitteln, läßt ihre Untersuchung sowie die der Abbildung von Testobjekten einen Rückschluß auf die Größe der Fehlerkoeffizienten zu. Werden als Testobjekte Netze in der Basisebene und die auf den Schirm transformierten Netze untersucht, so läßt sich zum Beispiel diejenige Form einer Blende in der Basisebene ermitteln, die ein solches Strahlenbündel erzeugt, das in der Schirmebene unter dem Einfluß der Ablenkfehler gerade einen gewünschten Bündelquerschnitt besitzt.

Die vorliegende Arbeit wurde im Institut für Elektronenmikroskopie am Fritz-Haber-Institut der Max-Planck-Gesellschaft, Berlin-Dahlem, unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. E. Ruska durchgeführt.

Für die Möglichkeit, diese Arbeit in seinem Institut auszuführen, sowie für die stetige Förderung möchte ich Herrn Prof. Dr. E. Ruska meinen Dank aussprechen. Ebenso danke ich Herrn Dr. P. Schiske für zahlreiche Diskussionen und Anregungen.

Der Max-Planck-Gesellschaft bin ich für die Gewährung eines Stipendiums zu Dank verpflichtet.

Lebenslauf

Ich wurde am 2.12.1938 als Sohn des Oberschulrates Dr. Ernst-Emil Klotz und seiner Ehefrau Dr. Luise Klotz in Meiningen geboren. Nach Ablegung der Reifeprüfung im Frühjahr 1957 an der Walther-Rathenau-Schule in Berlin-Grünwald begann ich im Sommersemester 1957 mein Physikstudium an der Freien Universität Berlin. Unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. E. Ruska fertigte ich von 1962 bis 1967 meine Diplomarbeit über Ablenkfehler magnetischer Ablenkanordnungen im Institut für Elektronenmikroskopie am Fritz-Haber-Institut der Max-Planck-Gesellschaft an und legte im Wintersemester 1967/68 die Diplomhauptprüfung in Physik ab. Anschließend begann ich mit den aus meiner Diplomarbeit hervorgegangenen Untersuchungen, die zu der vorliegenden Arbeit führten.

